

*Дашевский Д.А.,*

*Магистрант*

*Институт Информатики и Математики*

*Северо-Восточный Федеральный Университет*

*Россия, г. Якутск*

*Бубякин Игорь Витальевич*

*кандидат физико-математических наук, доцент*

*Института Математики и Информатики*

*Северо-Восточный Федеральный Университет*

*Россия, г. Якутск*

## **ОБ ОДНОМ ЭВРИСТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА**

***Аннотация:** В работе показывается, что применение эвристических методов поиска решения задачи по геометрии способствует повышению интереса у школьников к изучению геометрии.*

***Ключевые слова:** Эвристический метод, решение геометрической задачи, коэффициент корреляции Пирсона.*

***Annotation:** In work is shown that application of heuristic methods of searching of the solution of a task in geometry promotes increase in interest at school students in studying of geometry.*

***Keywords:** Heuristic method, solution of a geometrical task, coefficient of correlation of Pearson.*

Достаточно большое количество математиков занимались поиском общих эвристических методов решения математических задач. Разработкой таких методов занимались Папп Александрийский (2-ая пол III в), французский математик, философ и физиолог Рене Декарт (1596-1650) немецкий математик физик, изобретатель, юрист, историк, языковед

Вильгельм Лейбниц (1646-1716), чешский математик, философ Бернанд Больцано (1781-1848) написал подробное изложение эвристических методов. Много занимался исследованиями эвристических методов, венгерский математик Дьёрдь Пойа (1887-1985).

Для решения задач курса математики нужно иметь представление о четырех эвристических методах поиска решения задачи, а именно: метод разбиения задачи на подзадачи; метод преобразования задачи; метод моделирования; метод введения вспомогательных элементов. [1]

Рассмотрим один из эвристических методов решения математических задач на примере решения задач по геометрии треугольника. Для решения геометрической задачи учащемуся необходимо найти способ ее решения. Чтобы направить его поиск в нужном направлении, и имеются указанные выше четыре эвристических метода – метода решения геометрических задач.

Рассмотрим первый эвристический метод – метод разбиения задачи на подзадачи. Этот метод состоит в том, что геометрическую задачу разбивают на несколько (две-три) более простых подзадач, по возможности стандартных (алгоритмических) или ранее решенных, при последовательном решении которых будет решена и данная геометрическая задача.

При решении задач по геометрии треугольника эвристический метод разбиения задачи на подзадачи мы представим в виде указаний, где приводятся различные свойства геометрических фигур, связанных с треугольником.

Одним из самых важных формирований и умений решать геометрические задачи на плоскости является интерес к геометрии, которым может возникнуть у учащегося лишь тогда, когда задачи “получаются”, при этом именно в геометрии на плоскости знание теоретического материала, еще не гарантирует успех в решении рассматриваемых задач. Для того чтобы задачи решались, во-первых, нужно решать их достаточно много, и во-вторых очень важное значение при этом имеет указания учителя, которые направляют

мысль учащегося к нахождению решения геометрической задачи. Кроме того, большой объем разнообразного теоретического материала становится интересным только тем, кто уже почувствовал успех удовлетворения от решения геометрических задач. Поэтому применения эвристического метода “разбиения задачи на подзадачи” в виде указаний учителя имеет очень важное значение.

Какой бы метод решения задачи не был выбран учащимся, успех в поиске решения задачи зависит в первую очередь от знания теорем, формул, и умения их применять.

Рассмотрим пример, который демонстрируют применения эвристического метода “разбиения задачи на подзадачи” геометрических задач на геометрию треугольника.

**Пример.** Две медианы треугольника, равные 18 и 24, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

**Указание 1.** Изобразить треугольник с перпендикулярными прямыми,

**Указание 2.** Воспользоваться основным свойством медиан треугольника

**Указание 3.** Воспользоваться теоремой Пифагора.

Решение:

*Подзадача 1. Изобразить заданный треугольник с перпендикулярными медианами.*

Возникает проблема изображения треугольника по условию задачи: не в любом треугольнике две медианы взаимно перпендикулярны. Например, в треугольнике  $ABC$ , изображенном на (рис. 1), медианы  $AP$  и  $BH$  не взаимно перпендикулярны: изображение неверно. Поэтому искомое изображение

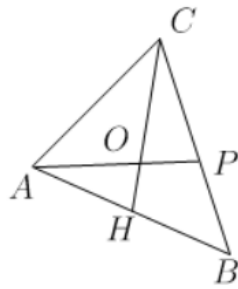


рис. 1

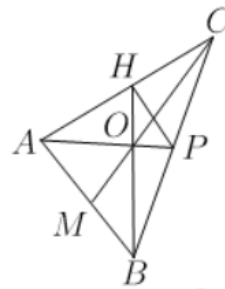


рис. 2

треугольника для решения данной задачи следует начинать, используя условие перпендикулярности его медиан.

Проводим две взаимно перпендикулярные прямые. Пусть  $O$  – точка их пересечения (рис. 2). На одной из этих прямых выбираем точку  $A$  и строим точку  $P$  (по разные стороны от точки  $O$ ) так, чтобы выполнялось  $AO:OP = 2:1$ . Аналогично, на другой прямой выбираем точку  $B$  и строим точку  $H$  так, чтобы  $BO:OH = 2:1$ . Точки  $A$  и  $B$  принимаем за вершины данного треугольника и строим третью вершину  $C = AH \cap BP$ .

*Подзадача 2. Докажем, что  $BH$  и  $AP$  – медианы треугольника  $ABC$ .*

Из соотношений  $AO:OP = BO:OH = 2:1$  следует подобие треугольников  $AOB$  и  $POH$  с равными вертикальными углами при вершине  $O$ . Поэтому  $HP \parallel AB$  и  $HP = 0,5AB$ . Это означает, что точки  $H$  и  $P$  – середины сторон соответственно  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ , то есть  $AP$  и  $BH$  – его медианы.

*Подзадача 3. Найдём длину медианы  $CM$ .*

Пусть  $AP = 18$  и  $BH = 24$ . Найдём длину медианы  $CM$ .

По свойству медиан в  $\triangle ABC$  имеем:  
 $AO:OP = BO:OH = 2:1 \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12; \quad BO = \frac{2}{3}BH = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16.$   
 Тогда по теореме Пифагора в прямоугольном  $\triangle AOB: AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ . А так как  $OM$  – медиана этого

треугольника, проведенная из вершины прямого угла, то  $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ . Учитывая, что  $CO:OM = 2:1$ , получаем:  $CM = 3OM = 3 \cdot 10 = 30$ .

**Ответ: 30.**

Указанный выше методический подход к решению геометрических задач использовался на уроках геометрии для учащихся 9 класса Мархинской СОШ №2 города Якутска. В результате применения такого методического подхода, у учащихся очевидно повысился интерес к изучению геометрии, и некоторые из учащихся пожелали заниматься научно-исследовательскими проектами по геометрии при подготовке к научно-практической конференции «Шаг в будущее».

У 22 учащихся сравнивают оценки по геометрии при использовании эвристического метода (переменная  $x$ ) с оценками по геометрии до использования эвристического метода (переменная  $y$ ).

Возникает вопрос – связана ли применения эвристического метода при решении геометрических задач с успешными результатами диагностических работ по геометрии. Ответ на этот вопрос найдем на основе корреляционного анализа Пирсона. [2]

Вычислим коэффициент корреляции Пирсона по формуле:

$$r_{xy} = \frac{S}{\sqrt{S_x \cdot S_y}}, \quad (1)$$

где

$$S = \sum_{i=1}^{22} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad (2)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{22} (x_i - \bar{x})^2, \quad (3)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{22} (y_i - \bar{y})^2. \quad (4)$$

Коэффициент  $r_{xy}$  характеризует наличие линейной зависимости между переменными  $x$  и  $y$ . Формула (1) расчета коэффициента корреляции

определена таким образом, что если зависимость между величинами  $x$  и  $y$  имеет линейный характер, то коэффициент Пирсона точно устанавливает тесноту этой связи. Поэтому он называется коэффициентом линейной корреляции Пирсона. Согласно формуле (1) необходимо подсчитать сумму каждой переменной, сумму квадратов каждой переменной и сумму последовательности произведений переменных друг на друга.

С этой целью представим экспериментальные данные в виде таблицы:

Таблица. Таблица для вычисления коэффициента корреляции Пирсона.

№	$x_i$	$y_i$	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	5	4	0,727	0,091	0,066157	0,528529	0,008281
2	5	4	0,727	0,091	0,066157	0,528529	0,008281
3	3	3	-1,273	-0,909	1,157157	1,620529	0,826281
4	5	5	0,727	1,091	0,793157	0,528529	1,190281
5	3	3	-1,273	-0,909	1,157157	1,620529	0,826281
6	5	5	0,727	1,091	0,793157	0,528529	1,190281
7	4	4	-0,273	0,091	-0,024843	0,074529	0,008281
8	4	3	-0,273	-0,909	0,248157	0,074529	0,826281
9	3	3	-1,273	-0,909	1,157157	1,620529	0,826281
10	3	3	-1,273	-0,909	1,157157	1,620529	0,826281
11	5	4	0,727	0,091	0,066157	0,528529	0,008281
12	4	4	-0,273	0,091	-0,024843	0,074529	0,008281
13	4	3	-0,273	-0,909	0,248157	0,074529	0,826281
14	5	5	0,727	1,091	0,793157	0,528529	1,190281
15	5	5	0,727	1,091	0,793157	0,528529	1,190281
16	5	5	0,727	1,091	0,793157	0,528529	1,190281
17	4	4	-0,273	0,091	-0,024843	0,074529	0,008281
18	4	3	-0,273	-0,909	0,248157	0,074529	0,826281
19	5	4	0,727	0,091	0,066157	0,528529	0,008281
20	4	4	-0,273	0,091	-0,024843	0,074529	0,008281
21	4	3	-0,273	-0,909	0,248157	0,074529	0,826281
22	5	5	0,727	1,091	0,793157	0,528529	1,190281
$\bar{x}$	4,273	3,909					
$\Sigma$					0,479339	0,561984	0,628009

где  $x_i$  – оценки учащихся при решении задач на геометрию треугольника с использованием эвристических методов,  $y_i$  – оценки учащихся при решении задач на геометрию треугольника до использования эвристических методов.

Найдем величины  $S$ ,  $S_x$ ,  $S_y$ :

$$S = \sum_{i=1}^{22} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0,479339, \quad (5)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{22} (x_i - \bar{x})^2 = 0,561984, \quad (6)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{22} (y_i - \bar{y})^2 = 0,628009. \quad (7)$$

Для определения значения коэффициента корреляции Пирсона  $r_{xy}$  по формуле (1), на основании (5)-(7), получим:

$$r_{xy} = \frac{S}{\sqrt{S_x \cdot S_y}} = \frac{0,479339}{\sqrt{0,561984 \cdot 0,628009}} = \frac{0,479339}{0,594079} = 0,806860 \approx 0,81.$$

Далее определим критические значения для полученного коэффициента корреляции по таблице критических значений коэффициента корреляции Спирмена. При нахождении критических значений для вычисленного коэффициента линейной корреляции Пирсона  $(r_{xy})_{эмп}$ , число степеней свободы равно:

$$k = n - 2,$$

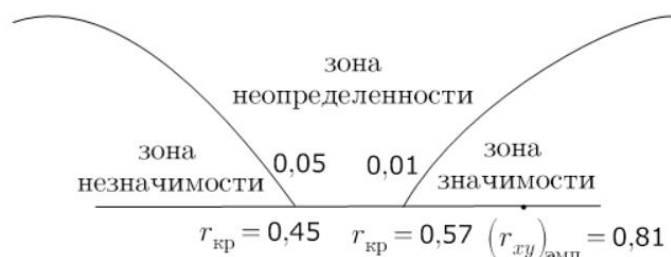
следовательно

$$k = 22 - 2 = 20.$$

Из таблицы критических значений коэффициента корреляции Спирмена находим

$$r_{кр} = \begin{cases} 0,45 & \text{для } p \leq 0,05, \\ 0,57 & \text{для } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Далее строим соответствующую “ось значимости”:



Ввиду того, что величина коэффициента корреляции попала в зону значимости, делается следующий вывод:

Зависимость между успешностью учащихся по геометрии и применения эвристического метода решения геометрических задач статистически значима. Полученная линейная зависимость говорит о том, что чем больше учащиеся решают геометрические задачи, основываясь на эвристическом методе, тем выше их успеваемость.

### Использованная литература

1. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: учебное пособие, Изд. 3-е, КД Либроком, кол-во с.244., 2008г.
2. Майер Р.А. Теория и практика статистического анализа в психолого-педагогических и социологических исследованиях: учебное пособие/ Р.А, Майер, Н.Р. Колмакова, А.В. Ванюрин.- Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2005. 352 с.