

УДК 167

Новиков Н.Б.
Институт психологии РАН
Россия, г. Москва

Novikov N.B.
Institute of Psychology RAS
Russia, Moscow

СИЛА АНАЛОГИЙ. ТВОРЧЕСТВО ПОЛЯ ДИРАКА. ЧАСТЬ 1

***Аннотация:** Поль Дирак является автором основополагающих трудов по квантовой механике (общая теория преобразований), квантовой электродинамике (метод вторичного квантования), теории элементарных частиц (предсказание позитрона). Предложенное им релятивистское уравнение электрона позволило естественным образом объяснить спин этой частицы. П.Дирак разработал статистическое описание фермионов – частиц с полуцелым значением спина (статистика Ферми - Дирака). Как отметил Карло Ровелли, «в его руках квантовая механика превратилась из запутанных догадок, полужаконченных вычислений, туманных метафизических дискуссий и хорошо работающих, но необъяснимых уравнений в прекрасное архитектурное сооружение – воздушное, простое и невероятно красивое» [1]. Целесообразно заглянуть в «творческую лабораторию» этого выдающегося ученого и проанализировать генезис его идей, в котором, как мы покажем, логико-вероятностная процедура аналогии играла фундаментальную роль.*

***Ключевые слова:** новые идеи, физические теории, обнаружение сходства, проведение аналогии.*

***Abstract:** Paul Dirac is the author of fundamental works on quantum mechanics (general transformation theory), quantum electrodynamics (second quantization method), elementary particle theory (positron prediction). The relativistic equation of the electron proposed by him made it possible to explain in a natural way the spin of this particle. P. Dirac developed a statistical description of fermions - particles with a half-integer spin value (Fermi-Dirac statistics). As Carlo Rovelli noted, “in his hands, quantum mechanics has evolved from convoluted conjectures, half-finished calculations, hazy metaphysical discussions, and well-functioning but inexplicable equations into a beautiful architectural structure - airy, simple and incredibly beautiful” [1]. It is advisable to look into the “creative laboratory” of this outstanding scientist and analyze the genesis of his ideas, in which, as we will show, the logical-probabilistic procedure of analogy played a fundamental role.*

***Key words:** new ideas, physical theories, discovery of similarities, drawing analogies.*

1. Аналогия первая: перенос скобок Пуассона в квантовую теорию

В 1925-1926 гг. В.Гейзенберг разработал математический аппарат квантовой механики, который в дальнейшем стал называться «матричным». Этому предшествовала мысль В.Гейзенберга о бесперспективности попыток определить координаты и траекторию того или иного электрона в атоме подобно тому, как астрономы вычисляют положение и скорость планеты в определенный момент ее орбитального движения. Молодой немецкий физик назвал координаты и траекторию электрона ненаблюдаемыми величинами, которые не должны использоваться в атомной теории. Эта теория, по его убеждению, должна ограничиваться установлением соотношений между величинами, которые непосредственно измеряются в экспериментальных исследованиях. К числу таких величин он отнес частоту излучения

спектральных линий, их интенсивность и поляризацию. В.Гейзенберг предположил, что частоты и интенсивность спектральных линий являются единственно существующими (наблюдаемыми) характеристиками внутриатомных движений, которые обуславливают переход атома из одного энергетического состояния в другое.

Поскольку немецкий физик был хорошо знаком с теорией рядов Фурье, он заключил, что эти внутриатомные движения можно представить в виде совокупности колебаний, аналогичных совокупности членов ряда Фурье. Другими словами, В.Гейзенберг предложил использовать «Фурье-представление» орбиты электрона, а не уравнение для координат и скоростей данной частицы, которое оказалось бы бессмысленным. Разрабатывая способ описания частот и амплитуд упомянутых внутриатомных движений, ученый ввел объекты, которые, как установили М.Борн и П.Иордан, являются эквивалентом матриц. М.Борн и П.Иордан развили подход В.Гейзенберга и показали, что его основой является матричное исчисление, изобретенное математиками XIX столетия без мысли о том, что однажды оно найдет применение в квантовой механике.

Однако в математическом подходе В.Гейзенберга не действовал закон коммутативности, согласно которому результат умножения не зависит от порядка множителей, а результат сложения – от порядка слагаемых. Когда немецкий физик столкнулся с этой некоммутативностью (с тем фактом, что $a \times b \neq b \times a$), он не знал, что с ней делать, но рассчитывал, что в практически важных задачах квантовой теории она не появится. Следует отметить, что первоначально В.Гейзенберг не был знаком с матричным исчислением, и даже М.Борн, адаптировавший этот аппарат для проблем квантовой теории, вынужден был консультироваться со специалистами по поводу отдельных аспектов данного исчисления. М.Джеммер в книге «Эволюция понятий квантовой механики» [2] пишет: «Положение дел в 1925 г. хорошо иллюстрируют замечания Гейзенберга по поводу письма от Иордана: «Теперь

ученые геттингенские математики так много говорят об эрмитовых матрицах, а я даже не знаю, что это такое». Известно, что даже Борн обращался к Отто Теплицу с вопросами по поводу некоторых свойств матриц» [2, с.206].

Осенью 1925 г. П.Дирак прочитал статью В.Гейзенберга, в которой излагалась его схема расчета наблюдаемых (измеримых) величин атомов, и стал размышлять над ней. Вскоре он понял, что некоммутативность, смущавшая немецкого физика, является важнейшим свойством созданной им схемы, тем свойством, которое нужно было понять. А дальше произошло событие, которое оказало значительное влияние на научную карьеру П.Дирака и дальнейшее развитие квантовой механики! П.Дирак обнаружил аналогию между коммутатором, который содержался в теории В.Гейзенберга, и скобками Пуассона, известными из классической механики. Скобка Пуассона – это оператор, играющий центральную роль в определении эволюции во времени динамической системы. На основе сделанного наблюдения П.Дирак пришел к выводу, что математический аппарат квантовой механики можно разработать по аналогии с методами и алгоритмами классической физики.

В результате в квантовой теории появились так называемые «квантовые скобки Пуассона» - аналог классических скобок, изобретенных французским математиком С.Д.Пуассоном (1781-1840). Впервые С.Д.Пуассон сообщил о своем изобретении, которое, в свою очередь, представляло собой обобщение скобок Лагранжа, в Институте Франции 16 октября 1809 г. Полезность скобок Пуассона выяснилась в процессе работы над интегрированием уравнений движения в теории возмущений для планетных орбит. Их существенная роль в теоретической механике была осознана Карлом Якоби в 1842-1843 гг. и изложена в его «Лекциях по динамике», впервые изданных в 1866 г. (уже после смерти К.Якоби).

П.Дирак в книге «Воспоминания о необычайной эпохе» [3] подробно рассказывает о том, как он обнаружил указанную аналогию. Сначала возникла смутная догадка о наличии сходства между коммутатором В.Гейзенберга и

результатом С.Д.Пуассона. Можно сказать (пользуясь понятиями нейробиологии), что в мозге П.Дирака нейронные ансамбли, хранящие информацию об идеях В.Гейзенберга, синхронизировались с нейронными ансамблями, содержащими сведения об идеях С.Д.Пуассона. Молодой ученый сразу же захотел проверить свою догадку, но не смог этого сделать, поскольку в воскресенье городские библиотеки не работали. П.Дирак вспоминает [3]: «В мучительном ожидании я провел ночь, ничего не зная о том, стоила ли чего-нибудь моя идея, но в течение этой ночи уверенность моя крепла. Наутро я бросился в библиотеку прямо к открытию и, найдя в «Аналитической динамике» Уиттекера [15] скобку Пуассона, обнаружил, что это как раз то, что мне нужно. Она была абсолютно аналогична коммутатору» [3, с.20].

Аналогия, позволившая П.Дираку перенести скобки Пуассона в квантовую механику, рассматривается во многих работах. Так, Ц.С.Сарангов и Б.И.Спасский в статье «О методе аналогий как закономерности развития физической науки» [4] отмечают: «Важным понятием в классической динамике является скобка Пуассона. Дирак **по аналогии** с классической скобкой Пуассона вводит квантовую и, учитывая, что в квантовой механике физическим величинам сопоставляются операторы, которые в общем случае не коммутируют, приходит к основным квантовым условиям или перестановочным соотношениям» [4, с.19].

Об этом же сообщается во 2-ом томе книги Б.И.Спасского «История физики» [5]: «Дирак вводит в квантовую механику вместо матриц линейные дифференциальные операторы, первоначально назвав их q -числами. Наиболее интересно применение Дираком квантовых скобок Пуассона. Он показал, что классическим скобкам Пуассона $[f_1, f_2]$ следует сопоставить квантовые скобки Пуассона...» [5, с.250].

Идея П.Дирака, возникшая благодаря аналогии, освещается также в книге Л.С.Полака «Уильям Гамильтон» [6]: «Как же построить уравнения движения для квантовой системы **по аналогии** с классической механикой? По мысли

Дирака, для этого надо воспользоваться скобками Пуассона, которым соответствуют некоторые аналоги и в квантовой теории» [6, с.143].

2. Аналогия вторая: «квантовое» применение математического формализма Гамильтона – Якоби

Обнаружение эквивалентности между коммутатором В.Гейзенберга и скобками С.Д.Пуассона стало отправным пунктом для реализации следующей, более масштабной, аналогии. П.Дирак понял, что математический формализм, разработанный В.Гамильтоном и К.Якоби в рамках классической механики, можно распространить в область квантовой теории. Как известно, В.Гамильтон показал, что все свойства динамической системы можно определить через одну величину H (функцию Гамильтона). Канонические уравнения Гамильтона, задающие эволюцию во времени динамических переменных q_i и p_i через производные гамильтониана, содержат в себе общие свойства всех динамических изменений. Как подчеркнул Л.С.Полак, «гамильтонов формализм – несомненный триумф математизации естествознания» [6, с.251].

В период времени с 1923 по 1926 г. П.Дирак проходил стажировку в Кембриджском колледже Святого Иоанна, где под руководством Р.Фаулера готовился к получению ученой степени доктора философии. В это время он досконально изучил классическую механику в формулировке Гамильтона – Якоби, а также методы использования переменных действие-угол – в основном по книге Э.Уиттекера «Аналитическая динамика», о которой мы уже говорили. Поэтому неудивительно, что в 1925 г. П.Дирак нашел «квантовое» применение методу Гамильтона – Якоби. О своих результатах он сообщил в статье [7], ценность которой сразу осознал Р.Фаулер.

Об этой аналогии, позволившей перенести в квантовую теорию метод Гамильтона – Якоби, пишет М.Джеммер в книге «Эволюция понятий

квантовой механики» [2]: «...Дирак, убежденный в незаменимости гамильтоновой механики для изучения атомной физики, не был удовлетворен изложением Гейзенберга и попытался приспособить его к формализму Гамильтона. Через несколько недель он достиг цели и тем самым установил одно из самых глубоких и полезных соотношений между квантовой механикой и классической механикой в формулировке Гамильтона – Якоби. Он получил этот результат, придав механике Гейзенберга форму алгебраического алгоритма, на основе которого он надеялся вывести все формулы квантовой теории, не прибегая к явному использованию произведений (матриц) Гейзенберга. Фаулер немедленно увидел важность этой работы и заставил Дирака опубликовать ее, пусть еще и не вполне законченную. Так статья Дирака «Фундаментальные уравнения квантовой механики», законченная 7 ноября 1925 г., появилась в декабрьском выпуске Proceedings [109] и ознаменовала начало его успешной деятельности в области квантовой механики» [2, с.226].

Этот же перенос, осуществленный П.Дираком, анализирует Джон Гриббин в книге «В поисках кота Шредингера» [8]: «...Гейзенберг хотя и указал на некоммутативность переменных в квантовой механике, то есть матриц, не развил свою идею, ходя вокруг да около. Разобравшись с уравнениями, Дирак быстро оценил фундаментальное значение простого факта, что $a \times b \neq b \times a$. В отличие от Гейзенберга, Дирак уже знал математические величины, которые вели себя таким образом, и за несколько недель смог переработать уравнения Гейзенберга с позиции той ветви математики, которую за век до этого развил Уильям Гамильтон» [8].

«С характерной для себя искренней скромностью, - продолжает Джон Гриббин, - Дирак описал, как просто было совершить следующий шаг, уже зная, что верные квантовые уравнения были обычными классическими уравнениями, записанными в гамильтоновой форме. Чтобы разрешить любую из множества мелких загадок квантовой теории, достаточно было найти

эквивалентные классические уравнения, сделать их гамильтоновыми и разрешить ребус» [8].

Далее автор подчеркивает, что математический аппарат, созданный В.Гамильтоном, настолько пригоден (приспособлен) для описания квантовых явлений и процессов, что ирландского математика вполне можно считать предтечей квантовой механики: «...Не забывая о том, что именно он изобрел ту форму математики, в которой $a \times b \neq b \times a$, не будет преувеличением сказать, что сэр Уильям Гамильтон, хоть это и было позабыто, стоял у истоков квантовой механики. Живи он дольше, он бы быстро заметил связь матричной механики с волновой. Дирак сделал это...» [8].

3. Аналогия третья: разработка «квантового» операторного исчисления

Выше мы процитировали Б.И.Спасского [5], который отмечал, что «Дирак вводит в квантовую механику вместо матриц линейные дифференциальные операторы, первоначально назвав их q-числами» [5, с.250]. Действительно, английский физик предложил операторную формулировку квантовой теории. Введенные им операторы упрощали вычисления, подчинялись правилам некоторой алгебры и удовлетворяли некоторым уравнениям. Другими словами, данные операторы при всей своей кажущейся абстрактности (которая могла создать ложное впечатление бесполезного педантизма) обладали практической ценностью.

Как же П.Дирак изобрел операторное исчисление, нашедшее широкое применение в квантовой механике? Отвечая на данный вопрос, мы можем сказать, что многие элементы операторного формализма уже существовали в науке. Заслуга П.Дирака состояла в том, что он по аналогии перенес эти элементы в квантовую теорию. Упомянутый формализм был разработан, главным образом, его соотечественником Оливером Хевисайдом (1850-1925),

который использовал его при анализе электрических сетей, при решении задач электромагнетизма. В операторном исчислении О.Хевисайда отсутствовали строгие определения и доказательства, но исследователь понимал, что строгость может быть достигнута позже. Эффективность метода операторов подтверждалась многочисленными примерами (индуктивно, экспериментально), и этого было, по мнению О.Хевисайда, вполне достаточно на первых этапах становления операторной теории. Он говорил: «Математика – экспериментальная наука». По-видимому, известный российский математик, ученик А.Н.Колмогорова, Владимир Игоревич Арнольд (1937-2010), часто произносивший эту фразу, должен разделять «права» на это крылатое выражение с О.Хевисайдом.

Вне всяких сомнений, П.Дирак ознакомился с операторным формализмом О.Хевисайда благодаря тому, что в 1918 г. поступил в Бристольский университет, желая стать инженером-электриком. Изучая теорию электрических цепей, он неизбежно должен был заинтересоваться операционным исчислением О.Хевисайда. Конечно, тогда он не думал о возможном использовании метода операторов в квантовой механике (эта мысль возникнет позже, во время его пребывания в Кембридже).

Б.М.Болотовский в книге «Оливер Хевисайд» [9] констатирует: «В конце 1918 г. шестнадцатилетний Поль Дирак, будущий великий физик, поступил студентом в Бристольский университет, намереваясь, по примеру своего старшего брата, стать инженером-электриком. Он изучал теорию электрических цепей и таким путем познакомился с операционным исчислением Хевисайда, а также с разработанной Хевисайдом алгеброй операторов» [9, с.146]. «Отметим, - продолжает автор, - что знакомство с операторной алгеброй Хевисайда пригодилось Дираку (и не только ему) при создании и развитии квантовой теории» [9, с.146].

Об этом же сообщает М.Джеммер в книге «Эволюция понятий квантовой механики» [2]. Автор разделил историю разработки операторного исчисления

на четыре стадии, отметив, что П.Дирак заимствовал (и по-своему модифицировал) операторные методы, созданные О.Хевисайдом на третьей стадии. «Для третьей стадии развития понятия оператора, - пишет М.Джеммер, - характерно использование операторов в задачах прикладной математики, в частности, при анализе электрических сетей. Наиболее важными (и неординарными) были исследования Оливера Хевисайда по использованию операторов в задачах электромагнетизма. Анализируя линейные цепи из соединенных проводниками индуктивностей, емкостей и сопротивлений, Хевисайд [99] обозначил дифференциальный оператор $D = d/dt$ буквой p и принял, что эта величина подчиняется алгебраическим законам. Этот метод он использовал и в тех случаях, где приходилось иметь дело с дифференциальными уравнениями в частных производных, и не обращал внимания на вопросы математической строгости. «Математика, - говорил он, - наука экспериментальная, и определения в ней появляются не сначала, а потом» [2, с.224].

Помимо всего прочего, некоторые элементы операторного формализма П.Дирак заимствовал из работ Чарлза Грейвса, который, в свою очередь, развивал и обобщал операторные идеи Чарлза Джеймса Харгрива. М.Джеммер поясняет [2]: «Особый интерес с нашей точки зрения представляет статья Чарлза Джеймса Харгрива [95] об использовании операторной функции ϕ (d/dx) для решения дифференциальных уравнений, таких, например, как уравнение Риккати; эта работа была представлена Королевскому обществу в Лондоне в июне 1847 г. и положила начало исследованиям, в которых стали уделять большое внимание вопросам, связанным с перестановкой символических операторов. Подход Харгрива вскоре был обобщен Чарлзом Грейвсом, с 1843 по 1862 гг. занимавшим пост профессора математики в Дублинском университете... В ряде работ [96], доложенных на заседаниях Ирландской академии наук, Грейвс, занимавшийся математикой, теологией, лингвистикой и археологией, разработал детальный и мощный операторный

формализм. Этот формализм, по крайней мере, один его существенный аспект, оказал влияние на работы Хевисайда, и даже Дирака» [2, с.223].

Чтобы исключить сомнения в том, что исследования Ч.Грейвса оказали влияние на П.Дирака, М.Джеммер в примечаниях добавляет: «Об этом говорил сам Дирак. Смотрите примечание 37 на странице 4 в статье Hanson N.P. Copenhagen interpretation of quantum theory. – American Journal of Physics, 1959, vol.27, p.1-15» [2, с.223].

4. Аналогия четвертая: открытие статистики Ферми - Дирака

До открытия, сделанного Э.Ферми и П.Дираком (1926), в квантовой теории существовала лишь статистика фотонов – квантов света, разработанная индийским физиком Ш.Н.Бозе и А.Эйнштейном. Источником этой статистической концепции послужили работы Л.Больцмана, который, занимаясь молекулярно-кинетической теорией, предложил способ, которым заданное число различных молекул газа с фиксированной полной энергией может быть распределено по ячейкам фазового пространства. После того, как А.Комптон (1922) доказал квантовую гипотезу света, сформулированную А.Эйнштейном, то есть обосновал корпускулярную природу света, можно было предложить новую трактовку частиц света. Именно это и сделал Ш.Н.Бозе (1924), интерпретируя данные частицы как газ фотонов (фотонный газ). При этом он перенес на этот фотонный газ больцмановский способ подсчета ячеек в фазовом пространстве частицы. На основе этого способа Ш.Н.Бозе определил Z^s – число ячеек, содержащихся в рассматриваемой области фазового пространства частицы.

О том, что индийский физик строил статистику световых корпускул, используя в качестве образца статистику газовых молекул, разработанную Л.Больцманом, сообщает А.Пайс в книге об А.Эйнштейне [10]. А.Пайс говорит о Ш.Н.Бозе: «Он подошел к определению Z^s не с точки зрения «числа

частиц», а с точки зрения «числа ячеек». Видимо, это заставило его пойти дальше по пути Больцмана, но заменить всюду «частицы» «ячейками»; он никак не обосновал (да и не мог этого сделать) такой подход, который, тем не менее, давал верный результат» [10, с.409]. Далее А.Пайс сравнивает уравнение, являющееся ключевым в статистике фотонов Ш.Н.Бозе, с уравнением, которое также является центральным в статистике молекул Л.Больцмана. После сопоставления двух уравнений А.Пайс приходит к выводу, что Ш.Н.Бозе действительно использовал методы Л.Больцмана: «Позволю себе высказать предположение, что Бозе считал подсчет ячеек [уравнение (23.13)] совершенно аналогичным больцмановскому подсчету частиц [уравнение 23.6] и что ограничение на число Z^s было им наложено по полной аналогии с фиксированием в статистике Больцмана числа N » [10, с.410]. Здесь N – число частиц рассматриваемой газовой системы.

В дальнейшем А.Эйнштейн распространил статистику Ш.Н.Бозе на газ, состоящий из одноатомных молекул, после чего разработанная ими теория стала называться «статистикой Бозе - Эйнштейна». А.Пайс с удовольствием приводит слова А.Эйнштейна относительно той аналогии, которую он использовал: «...Допуская, что излучение можно рассматривать как газ из квантов, мы обязаны признать, что аналогия между газом из квантов и газом из молекул должна быть полной» [10, с.412].

Появление статистики Бозе – Эйнштейна должно было инициировать мысль о целесообразности построить эквивалентную статистику для электронов – частиц, входящих в состав всех атомов. За решение этой задачи взялся итальянский физик Энрико Ферми и независимо от него – П.Дирак. Но сначала нужно было перенести в статистическую теорию электронов важный принцип, уже открытый к тому времени. Речь идет о принципе запрета В.Паули, согласно которому два и более электрона не могут одновременно находиться в одном и том же квантовом состоянии в атоме. Иначе говоря, требовалось осознать аналогию между предполагаемой (еще не созданной)

статистикой электронов и теми возможностями, которые содержатся в принципе В.Паули. К счастью, Э.Ферми и П.Дирак своевременно догадались об этой аналогии и экстраполировали принцип запрета в теорию, ныне именуемую «статистикой Ферми - Дирака». Эта экстраполяция (перенос) – главное, что требовалось для разработки указанной статистики. С развитием волновой механики, созданной усилиями Э.Шредингера, принцип запрета В.Паули стали понимать как утверждение о том, что волновые функции идентичных частиц должны быть антисимметричными.

Д.Д.Иваненко в статье «Введение в теорию элементарных частиц» [11] констатирует: «Ферми и Дирак, применив принцип Паули к электронному газу, построили новую квантовую статистику, отличную от классической» [11, с.154].

Об этом же сообщает Е.С.Ицкевич в работе [12]: «Физик из Швейцарии Вольфганг Паули в 1925 году сформулировал правило, согласно которому два электрона в системе не могут находиться в одном и том же состоянии (двигаться одинаковым образом). Если учесть, что каждый электрон обладает спином – моментом вращения, то не более двух электронов с противоположно направленными спинами могут иметь одинаковые скорости и направление движения. В 1926 году итальянский физик Энрико Ферми и английский Поль Дирак применили принцип запрета Паули к электронному газу» [12, с.118-119].

М.Джеммер [2] пишет о принципе запрета: «...Выяснилось, что суть принципа состоит в требовании, чтобы для системы тождественных частиц – фермионов полные функции состояний, учитывающие наличие спина, были антисимметричны относительно любой перестановки частиц. Тем самым стало ясно, что принцип запрета, как и принцип относительности, является не просто одной из теорем физики, но одной из общих «заповедей», определяющих форму самих физических законов. Поэтому не удивительно, что область применения этого принципа оказалась необычайно широка,

включая оболочечную структуру атомов, энергии электронов в металлах, химическую валентность, ферромагнетизм и многие другие явления» [2, с.148].

5. Аналогия пятая: открытие релятивистского уравнения электрона

В 1926 г. австрийский физик Э.Шредингер опубликовал свое знаменитое волновое уравнение, послужившее основой волновой механики, дополнившей матричную квантово-механическую теорию В.Гейзенберга. Основная аналогия, использованная Э.Шредингером при выводе указанного уравнения, заключалась в том, что он взглянул на атом как на колебательную систему. Это позволило ему отождествить устойчивые (стационарные) энергетические состояния атома с возможными собственными колебаниями системы. Поскольку характер этих колебаний изучает теория собственных значений (теория Штурма - Лиувилля), Э.Шредингер перенес эту теорию в область решения стоящей перед ним задачи – задачи вывода волнового уравнения квантовой механики. Отсюда название четырех его статей, посвященных волновой механике, - «Квантование как задача о собственных значениях».

П.Дирак внимательно изучил эти статьи Э.Шредингера и продемонстрировал эквивалентность между его математическим подходом и матричной техникой В.Гейзенберга, хотя первоначально они казались несовместимыми. Не сомневаясь в корпускулярно-волновом дуализме, постулированном Луи де Бройлем, П.Дирак пришел к выводу, что в волновой механике можно получить столь же важные результаты, как и в теории, описывающей атомные явления и процессы при помощи аппарата матричного исчисления. После серии проб и ошибок П.Дирак (1928) получил один из таких важных результатов – линейное релятивистское уравнение электрона, ныне называемое «уравнением Дирака». Именно это уравнение

выгравировано на камне в Вестминстерском аббатстве (Англия), где захоронен ученый.

Как же П.Дирак открыл это уравнение? Руководствуясь, по меньшей мере, тремя аналогиями. Во-первых, он использовал в качестве образца (прототипа) упомянутое волновое уравнение Шредингера. Но это уравнение не было релятивистским, то есть не учитывало принципов специальной теории относительности (в первую очередь соотношение между энергией и массой). Это заставило английского физика по аналогии перенести в теорию электрона представления (идеи), разработанные А.Эйнштейном. Во-вторых, П.Дирак был знаком с уравнением электрона, предложенным В.Паули (1927). В этом уравнении применялись двухрядные спиновые матрицы, обычно называемые «матрицами Паули». П.Дирак перенес эти матрицы в свое уравнение для электрона, увеличив их число с двух до четырех. Иначе говоря, если В.Паули описал электрон с помощью двух волновых функций, то П.Дирак распространил его подход на четыре волновые функции. Таким образом, П.Дирак 1) обобщал уравнение Шредингера для волновой функции ψ , 2) переносил в теорию электрона принципы специальной теории относительности и 3) использовал матрицы В.Паули, содержащиеся в его нерелятивистском уравнении для электрона.

О том, что П.Дирак обобщил уравнение Шредингера, сообщают многие авторы, интересующиеся генезисом открытий английского физика. Так, М.Джеммер [2] пишет: «Дирак [6] обобщил уравнение Шредингера и получил систему из четырех дифференциальных уравнений первого порядка; это обобщение, так называемое «линейное уравнение Дирака», удовлетворяло требованиям релятивистской инвариантности и автоматически учитывало свойство спина, без потери общефизических аспектов описания на языке волновой механики» [2, с.350].

Здесь [6] – Dirac P.A.M. The quantum theory of electron // Proceedings of the Royal Society of London (A). – 1928. – Vol.117. – P.610-624.

Об этом же сообщает Д.Д.Иваненко в статье «Конференция по атомному ядру в Ленинграде» [13]: «В 1928 г. Дираку удалось **обобщить** волновое уравнение Шредингера для электрона, учтя требования теории относительности. В известном смысле знаменитое уравнение Дирака является самым тонким из законов физики; своего рода передовым форпостом, наиболее далеко выдвинутым в неизвестное» [13, с.141].

Факт переноса принципов СТО в теорию электрона, осуществленного П.Дираком, обсуждается в монографии Б.Г.Кузнецова «Развитие физических идей от Галилея до Эйнштейна...» [14]: «Дирак рассматривает уравнение Шредингера и констатирует его нерелятивистский характер. **Перенеся** в квантовую механику найденные Эйнштейном соотношения между энергией и импульсом движущегося тела, можно изменить уравнение Шредингера таким образом, чтобы оно стало релятивистским – ковариантным при переходах от одной инерциальной системы к другой, т.е. при лоренцевых преобразованиях. Но при этом уравнение разбивается на четыре, и, по существу, функция ψ разделяется на четыре различные функции: $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Это очень важное обстоятельство» [14, с.474].

Наконец, то обстоятельство, что П.Дирак заимствовал и перенес в свое уравнение матрицы В.Паули, содержащиеся в его формуле для нерелятивистского электрона, описывается в статье Б. Ван дер Вардена «Принцип запрета и спин» [15]. Автор данной публикации констатирует: «Дирак использовал матрицы Паули s_k при составлении релятивистского волнового уравнения первого порядка. Волновое уравнение Дирака содержит матрицы и похоже на уравнение Паули, а не на старое релятивистское волновое уравнение» [15, с.258]. Автор добавляет: «Исходя из двухрядных матриц Паули s_x, s_y, s_z , Дирак сумел построить набор из четырехрядных матриц γ_μ , удовлетворяющих условиям (4)» [15, с.268]. Не будем пояснять суть условия (4), отсылая любознательного читателя к статье Б. Ван дер Вардена.

Аналогичные сведения можно найти в статье Д.Мехры «Золотой век теоретической физики» [16], где он называет уравнение В.Паули для электрона «приближением»: «Намерением Дирака было пойти дальше такого приближения. Из σ -матриц Паули и импульса в трехмерном пространстве можно сформировать скалярное произведение, и он хотел обобщить его на четырехмерное пространство-время. После нескольких недель сосредоточенных усилий он открыл простое решение, которое смог получить, обобщая 2×2 - σ -матрицы на 4×4 матрицы, которые он назвал γ -матрицами» [16, с.155].

6. Аналогия шестая: создание электрон-дырочной концепции и предсказание позитрона

Когда П.Дирак вывел свое релятивистское уравнение для электрона, он обратил внимание, что это уравнение содержит, помимо решений с положительной энергией, также и решения с отрицательной энергией. Это не приводило бы к трудностям в классической теории, согласно которой энергия частиц может меняться только непрерывно и поэтому переходов в состояния с отрицательной энергией не происходит. Однако в квантовой теории любое малое взаимодействие вызывает переходы в такие состояния, то есть «непоправимую катастрофу» [17]. В 1930 г. английский физик предложил оригинальную концепцию, объясняющую состояния с отрицательной энергией. Он предположил, что, помимо обычных электронов, существуют другие (еще не открытые частицы), которые можно было бы назвать антиэлектронами.

Но почему эти антиэлектроны еще никто не наблюдал? П.Дирак высказал идею о том, что окружающее пространство – это «море электронов», в котором все состояния с отрицательной энергией заняты. Но если один из обычных электронов покидает это «море», то образуется «дырка», которая, по мнению

П.Дирака, и представляет собой ненаблюдаемый антиэлектрон. Первоначально ученый придерживался версии, согласно которой новая частица – это протон (масса которого в 2000 раз превосходит массу электрона). Но вскоре Герман Вейль, Роберт Оппенгеймер и Игорь Тамм (отечественный физик, лауреат Нобелевской премии за 1958 г.) показали, что масса дырок должна совпадать с массой электрона. Кроме того, в 1932 г. К.Андерсон экспериментально обнаружил элементарную частицу, похожую по своим свойствам на ту, о которой говорил П.Дирак. После этого автор релятивистского уравнения для электрона заявил, что его теория предсказала эту частицу, получившую название «позитрона». Поэтому сегодня считается, что П.Дирак вычислил ее существование «на кончике пера».

Анализ рассуждений П.Дирака позволяет описать (реконструировать) все мотивирующие факторы, которые привели его к предсказанию новой частицы. Разумеется, первая мысль о существовании антиэлектрона возникла по аналогии с тем, что его релятивистское уравнение для электрона содержало решения с отрицательной энергией. Как ни странно, П.Дирак вполне серьезно относился к тем математическим формулам, на которые он наталкивался в ходе исследований. Он был убежден, что эти формулы имеют вполне определенный физический смысл, который следует искать, прилагая максимум усилий. Ученый рассуждал: если один набор решений, вытекающий из уравнения, соответствует обычному электрону, то, по аналогии, другой набор решений должен соответствовать новой частице.

Идея П.Дирака о том, что новые частицы «ускользают» от наблюдения, поскольку они представляют собой «дырки» (вакантные состояния) в безграничном море электронов, возникла на основе двух аналогий. Первая состояла в том, что английский физик использовал аналогию с теорией химической валентности. Как известно, эта теория утверждает, что химические элементы имеют заполненные и незаполненные электронные оболочки. Если электрон покидает заполненную оболочку, в ней образуется

вакансия и меняется реакционная способность химического элемента. П.Дирак предположил, что его «море обычных электронов» - это аналог заполненной оболочки элемента, а «дырка» в этом море, соответствующая антиэлектрону, - это аналог вакансии, образующейся в заполненной оболочке.

Раскрывая исходные посылки своей электрон-дырочной концепции, позволившей предсказать позитрон, П.Дирак в книге «Воспоминания о необычайной эпохе» [3] говорит: «Прийти к этой идее было несложно: было совершенно ясно, что нужно получить, и существовала очень близкая **аналогия** с теорией химической валентности. Все газы образуют заполненные оболочки. У щелочных элементов один или два электрона располагаются вне заполненной оболочки. Эти электроны химически активны, и они же наиболее активно участвуют в образовании спектров. Теперь мы должны учесть возможность появления в заполненной оболочке дырки – картина, соответствующая атомам галогенов. Полученное из химической теории атомов представление о таком родстве дырок и электронов можно было непосредственно применить к состояниям с положительной и отрицательной энергией, поэтому мне не пришлось особенно напрягать воображение, чтобы придумать теорию, в которой заняты почти все состояния с отрицательной энергией. Как только у меня возникла такая идея, я, конечно, сразу подумал о том, что состояния с отрицательной энергией должны соответствовать частицам, имеющим массу, равную массе электрона, но, в отличие от электрона, заряженным положительно» [3, с.42].

Вторая аналогия, на которую опирался П.Дирак, - это его мысль о необходимости перенести в концепцию «дырок» (антиэлектронов) принцип запрета В.Паули и объяснить невозможность наблюдать новые частицы с помощью данного принципа. Таким образом, английский физик, уже использовавший постулат Паули при разработке «статистики Ферми - Дирака», вновь обратился к нему, но уже с другой целью – чтобы интерпретировать существование еще не открытых частиц.

П.Дирак в книге «Пути физики» [18] излагает путь рождения своей концепции антиэлектрона: «...Проблема отрицательной энергии стала главной. Оказалось, что эту проблему можно решить, если использовать то свойство электронов, что никакие два (или более) из них не могут находиться в одном и том же состоянии. Это свойство является следствием законов квантовой механики, возникающим при наложении на волновую функцию необходимых условий симметрии. Первым его предложил Паули для того, чтобы объяснить структуру атомов в периодической системе элементов. Если ни в каком состоянии не может находиться больше одного электрона, то в атоме существуют разные электронные оболочки. Оболочки заполняются постепенно от внутренней к внешней, и так постепенным заполнением оболочек строится периодическая система элементов» [18, с.20-21].

Об этом же П.Дирак говорил в своей Нобелевской лекции (1933). Что касается Вольфганга Паули, первооткрывателя упомянутого принципа, то он получил Нобелевскую премию с определенным запозданием (лишь в 1945 г.). И вновь В.Паули в лекции, прочитанной в Стокгольме, напомнил, что его постулат запрета помог П.Дираку предсказать позитрон и, кроме того, является механизмом, обеспечивающим устойчивость вакуума. Повествуя о том, как английскому физика удалось добиться построения концепции сосуществования частиц и античастиц, В.Паули отмечает [19]: «Вы знаете ответ Дирака: этого действительно можно было бы добиться, применяя принцип запрета. В своей лекции здесь, в Стокгольме, Дирак сам объяснил, что в соответствии с предложенной им новой интерпретацией его теории в истинном вакууме все состояния с отрицательной энергией должны быть заполненными, и наблюдать можно только отклонения от этого состояния с наименьшей энергией, а именно – дырки в безбрежном море этих занятых состояний. Принцип запрета и обеспечивает устойчивость вакуума, в котором все состояния с отрицательной энергией заняты» [19, с.83].

7. Аналогия седьмая: «квантовое» применение идеи спиноров

Чтобы понять, как П.Дирак пришел к идее о возможности выразить квантово-механические понятия на языке спиноров, нам нужно вернуться в тот период времени, когда он стал бакалавром электротехники. После получения степени бакалавра в Бристольском университете в 1921 г. юный Поль предпринял попытку продолжить учебу в Кембриджском университете, но ему, недавнему эмигранту, было отказано в стипендии, и он вернулся в Бристоль. Здесь он получил разрешение слушать лекции на математическом факультете неофициально, без внесения платы за обучение. Наибольшее впечатление на П.Дирака произвели лекции математика Петера Фрезера, который, помимо всего прочего, познакомил юношу с проективной геометрией. Позднее П.Дирак писал об этой геометрии [3]: «Она произвела на меня сильнейшее впечатление своим математическим изяществом. Кроме того, методы проективной геометрии дают огромные возможности. Мне кажется, что в большинстве своем физики очень мало знают о проективной геометрии, и я бы сказал, что это пробел в их образовании. Проективная геометрия всегда работает с плоским пространством, но она представляет собой мощнейший инструмент для его изучения и вооружает нас методами, например, методом однозначных соответствий, которые, как по волшебству, выдают результаты» [3, с.12]. «В своей работе я всегда прибегал к соображениям проективной геометрии» [3, с.12].

Далее П.Дирак детализирует ту помощь, которую ему оказала проективная геометрия при разработке спинорного описания квантово-механических понятий: «...Когда человек начинает работать в новой области и еще не знает, что его ждет, ему необходимо отчетливо представлять себе предмет исследования. Вот для этих целей проективная геометрия и подходит больше всего. Всё сказанное относится и к моим работам о спинорах. Мы

должны были работать с величинами совсем нового типа, но и здесь лучший инструмент для исследования дает нам проективная геометрия» [3, с.12].

Напомним, что в качестве самостоятельной математической дисциплины проективная геометрия оформилась в России, в г.Саратове, где с марта 1813 по июнь 1814 г. находился пленный лейтенант наполеоновской армии Жан Виктор Понселе. Используя свободное время, он подготовил черновой вариант своего «Трактата о проективных свойствах фигур», опубликованного в Париже в 1822 г. Этот год и считается годом рождения проективной геометрии, хотя некоторые теоремы этой отрасли математического знания были известны Жерару Дезаргу (1591-1661) и Блезу Паскалю (1623-1662).

Специалисты считают проективную геометрию той «тайной» (тайным источником), которая определила достижения П.Дирака в квантовой теории спиноров. Из этой же геометрии английский физик заимствовал принцип двойственности Понселе, чтобы в дальнейшем перенести его в квантовую механику. В.И.Санюк и А.Д.Суханов в статье «Дирак в физике XX века» [20] отмечают: «Из проективной геометрии Дирак почерпнул не только идею спиноров (однородных координат для изотропных линий), но и **перенес** в квантовую механику принцип двойственности Понселе, введя не только векторы состояния, но и дуальные к ним со-векторы. Примечательно, что, несмотря на то, что Дирак приоткрыл свою «тайну», позволившую ему получить выдающиеся результаты, физическое сообщество практически не прореагировало на эти сообщения. Во всяком случае, ни проективная геометрия, ни геометрия Лобачевского так и не вошли в обязательные математические курсы физических факультетов, да и работ, «реставрирующих» оригинальный ход рассуждений Дирака на языке проективной геометрии, в печати не обнаруживается» [20, с.967].

Во 2-й части статьи мы рассмотрим историю таких идей П.Дирака, как квантование электромагнитного поля, предсказание антипротона и мысль о целесообразности использования формализма Лагранжа в квантовой

механике. Последняя идея, как известно, оказала большое влияние на Ричарда Фейнмана, подтолкнув его к разработке метода интегралов по траекториям (путям).

Литература

1. Ровелли К. Нереальная реальность. Путешествие по квантовой петле. - Санкт-Петербург: изд-во «Питер», 2020. – 304 с.
2. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. – М.: «Наука», 1985. – 384 с.
3. Дирак П.А.М. Воспоминания о необычайной эпохе. Сборник статей. – М.: «Наука», 1990. – 208 с.
4. Сарангов Ц.С., Спасский Б.И. О методе аналогий как закономерности развития физической науки // сборник «История и методология естественных наук». Выпуск 10. – М.: изд-во Московского университета, 1971. – С.15-28.
5. Спасский Б.И. История физики. Часть 2. – М.: «Высшая школа», 1977. – 309 с.
6. Полак Л.С. Уильям Гамильтон. – М.: «Наука», 1993. – 270 с.
7. Dirac P.A.M. The fundamental equations of quantum mechanics // Proceedings of the Royal Society of London (A). – 1925. – Vol.109. – P.642-653. Перевод статьи: Дирак П.А.М. Основные уравнения квантовой механики // Успехи физических наук. – 1977. – Том 122. - № 4. - С.611-621.
8. Гриббин Дж. В поисках кота Шредингера. Квантовая физика и реальность. – М.: «Рипол классик», 2016. – 352 с.
9. Болотовский Б.М. Оливер Хевисайд. – М.: «Наука», 1985. – 260 с.
10. Пайс А. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. – М.: «Наука», 1989. – 568 с.
11. Иваненко Д.Д. Введение в теорию элементарных частиц // Успехи физических наук. – 1947. – Том 32. - № 2. – С.149-184.

12. Ицкевич Е.С. Ферми-поверхности и аномалии электронных характеристик металлов под высоким давлением // Соросовский образовательный журнал. – 1997. - № 10. - С.118-125.
13. Иваненко Д.Д. Конференция по атомному ядру в Ленинграде // Фронт науки и техники. – 1933. – № 10-11. – С.139-143.
14. Кузнецов Б.Г. Развитие физических идей от Галилея до Эйнштейна в свете современной науки. – М.: «Либроком», 2010. – 520 с.
15. Ван дер Варден Б. Принцип запрета и спин // сборник «Теоретическая физика 20-го века». – М.: изд-во иностранной литературы, 1962. – С.231-284.
16. Мехра Д. «Золотой век теоретической физики»: научная деятельность П.А.М. Дирака с 1924-го по 1933 год // Успехи физических наук. – 1987. – Том 153. - № 1. – С.135-165.
17. Кобзарев И.Ю. Великий физик современности // Вестник АН СССР. – 1985. - № 9. – С.99-105.
18. Дирак П.А.М. Пути физики. – М.: «Энергоатомиздат», 1983. – 88 с.
19. Паули В. Принцип запрета и квантовая механика // Паули В. Физические очерки. Сборник статей. – М.: «Наука», 1975. – С.65-97.
20. Санюк В.И., Суханов А.Д. Дирак в физике XX века (к 100-летию со дня рождения) // Успехи физических наук. – 2003. - Том 173. - № 9. - С.965-984.