

*Новиков Н.Б.  
Институт психологии РАН  
Россия, г. Москва*

*Novikov N.B.  
Institute of Psychology RAS  
Russia, Moscow*

## **СИЛА АНАЛОГИЙ. ТВОРЧЕСТВО ПОЛЯ ДИРАКА. ЧАСТЬ 2**

***Аннотация:** В данной статье мы продолжаем анализировать аналогии, которые использовал Поль Дирак в процессе выдвижения своих идей. Мы рассмотрим исторические факты, проливающие свет на то, как выдающийся ученый разработал метод квантования электромагнитного поля, предсказал существование новой элементарной частицы – антипротона и пришел к выводу о возможности использования формализма Лагранжа в квантовой механике (впоследствии этот подход развил Р. Фейнман).*

***Ключевые слова:** новые идеи, физические теории, обнаружение сходства, проведение аналогии.*

***Abstract:** In this article, we continue to analyze the analogies used by Paul Dirac in the process of putting forward his ideas. We will consider historical facts that shed light on how an outstanding scientist developed a method for quantizing an electromagnetic field, predicted the existence of a new elementary particle - the antiproton, and came to the conclusion that it is possible to use the Lagrange formalism in quantum mechanics (subsequently this approach was developed by R. Feynman).*

***Key words:** new ideas, physical theories, discovery of similarities, drawing analogies.*

## 1. Аналогия восьмая: изобретение метода квантования электромагнитного поля

После того, как М.Планк разработал метод квантования гармонических осцилляторов, ученые должны были прийти к идее о переносе данного метода на электромагнитное поле. Иначе говоря, должна была возникнуть мысль о разработке способа квантования электромагнитного поля по аналогии с техникой квантования механических осцилляторов М.Планка. Последний показал, что энергия атомного (молекулярного) осциллятора может принимать лишь дискретные значения, кратные  $h\nu$ , где  $h$  – постоянная Планка (квант действия),  $\nu$  – частота излучения, то есть частота колеблющейся частицы. Выдающиеся физики Пауль Эренфест (1906) и Петер Дебай (1910) провели гениальную аналогию: они представили электромагнитное поле как совокупность гармонических осцилляторов. В этом случае отдельному осциллятору соответствует элементарный компонент электромагнитного поля – монохроматическая (синусоидальная) волна, а энергия этой волны, подобно энергии гармонического осциллятора, должна быть кратна  $h\nu$ . Кроме того, П.Эренфест использовал аналогию между амплитудой собственных колебаний в полости и координатой механического осциллятора. Данный подход, предложенный П.Эренфестом и П.Дебаем, положил начало квантовой теории поля и квантовой электродинамике.

Об этой аналогии П.Эренфеста и П.Дебая пишут многие специалисты. Так, М.А.Ельяшевич в статье «От возникновения квантовых представлений до становления квантовой механики» [1] констатирует: «Согласно Эренфесту и Дебаю, энергия каждого собственного колебания электромагнитного поля квантуется и должна быть кратной  $\varepsilon = h\nu$ , как и для планковского резонатора» [1, с.680]. «Идеи данного подхода – идеи квантования электромагнитного поля – положили начало квантовой электродинамике» [1, с.680].

Более подробные сведения содержатся в очерке Г.Вентцеля «Квантовая теория полей (до 1947 г.)» [2]: «Идея квантования поля возникла около пятидесяти лет тому назад. Особенно отчетливо характерные черты будущей теории проявились в работе Эренфеста. Рассматривая теорию черного излучения Планка и обсуждая свойства спектра теплового равновесного излучения в терминах нормальных колебаний Рэлея - Джинса, Эренфест использовал **аналогию** между амплитудой собственных колебаний в полости и координатой механического осциллятора. Если классическая теорема о равномерном распределении приводит к спектру Рэлея – Джинса, то как же следует видоизменить теорию, чтобы получить спектр Планка? Квантование механических осцилляторов, введенное Планком, **подказало** Эренфесту следующую гипотезу: энергия поля, сосредоточенная в одном нормальном колебании с частотой  $\nu$ , может быть только целым кратным  $h\nu$ . Это же предположение позволило Дебаю в 1910 г. действительно получить спектр Планка» [2, с.60].

Приведем еще один источник. Б.Г.Кузнецов в монографии «Развитие физических идей от Галилея до Эйнштейна...» [3] анализирует ход рассуждений ученых, сумевших проквантовать поле: «Электромагнитное поле в пустоте может быть разложено на компоненты согласно теореме Фурье, иными словами, электромагнитное поле рассматривается как результат суперпозиции монохроматических, синусоидальных волн. Возьмем одну из таких компонент электромагнитного поля, некоторую монохроматическую волну. **Сравним** ее с гармоническим осциллятором. Волна и осциллятор обладают **сходными** динамическими свойствами. Со времен первых работ Планка по теории квантов стало известно, что энергия гармонического осциллятора может принимать лишь дискретные значения – кратные  $h\nu$ . Если электромагнитное поле состоит из монохроматических волн, сопоставленных с гармоническими осцилляторами, то, прежде всего, энергия

электромагнитного поля квантуется, т.е. принимает дискретные значения...» [3, с.477].

Развивая аналогию П.Эренфеста и П.Дебая, основатели квантовой механики М.Борн, В.Гейзенберг и П.Иордан (1926) предложили применять принципы этой механики к амплитуде волны и интерпретировать ее как оператор, точнее, как матрицу. Данные ученые постулировали существование аналогии между матрицей этой волны (элементарного компонента электромагнитного поля) и матрицей координаты линейного осциллятора. В результате они смогли определить средний квадрат флуктуаций энергии черного излучения.

Поскольку П.Дирак хорошо владел аппаратом матриц и операторным исчислением, а также прекрасно ориентировался в актуальных проблемах квантовой механики, он смог извлечь из подхода М.Борна, В.Гейзенберга и П.Иордана больше, чем смогли извлечь они сами. Английский физик положил их идеи в основу своей теории взаимодействия атомов с электромагнитным полем. Таким образом, П.Дирак разработал метод квантования поля, ассимилируя и развивая аналогии, введенные в квантовую теорию П.Эренфестом, П.Дебаем, М.Борном и др.

Г.Вентцель в очерке «Квантовая теория полей» [2] рассматривает ключевой момент генезиса указанных результатов П.Дирака: «Если справедливо, что элементарная световая волна эквивалентна гармоническому осциллятору с собственными значениями энергии  $n\hbar(+1/2\hbar)$ , то естественно также применять квантовую механику к амплитуде волны и интерпретировать ее как оператор или, точнее, как матрицу, подобную матрице координаты линейного осциллятора... Эту идею в 1926 г. использовали Борн, Гейзенберг и Иордан [5] при определении среднего квадрата флуктуаций энергии черного излучения; однако в полной мере ее оценил Дирак [6], положивший ее в основу созданной им теории взаимодействия излучения с атомными системами» [2, с.61].

Здесь [5] – Born M., Heisenberg W., Jordan P. // Zs. F. Phys. – 1926. – Bd.35. – S.557;

[6] – Dirac P.A.M. // Proc. Roy. Soc. London (A). – 1927. – Vol.A114. – P.243.

## **2. Аналогия девятая: предсказание антипротона**

Экспериментальное открытие позитрона, сделанное Карлом Андерсоном в 1932 году, заставило многих физиков пересмотреть свое отношение к идее новой частицы, высказанной П.Дираком после анализа решений, содержащихся в его релятивистском уравнении для электрона. Если раньше такие авторитетные ученые, как Нильс Бор и Вольфганг Паули, считали беспочвенной теорию П.Дирака, предсказавшую позитрон, то после находки К.Андерсона такое мнение становилось неуместным. Но экспериментальное обнаружение позитрона имело еще одно весьма важное последствие: П.Дирак уверовал в справедливость своей концепции и счел возможным пойти дальше. Коль скоро такая частица, как электрон, рассуждал он, имеет своего двойника (антиэлектрон), то разумно предположить, что и другие элементарные частицы должны иметь своих двойников. В рамках такой аргументации (основанной на аналогии) английский физик предсказал существование антипротона – частицы, подобной протону, но имеющей отрицательный заряд.

В своей Нобелевской лекции «Теория электронов и позитронов» [4] П.Дирак говорит: «Теория электронов и позитронов, которую я только что обрисовал в общих чертах, является самосогласованной теорией, которая соответствует известным сегодня экспериментальным фактам. Нам бы хотелось иметь такую же удовлетворительную теорию протонов. Это потребовало бы существования отрицательно заряженных протонов, образующих зеркальное отражение обычных положительно заряженных протонов. <...> В любом случае, я думаю, что отрицательный протон может существовать, так как теорией уже определено, что имеется полная и

совершенная симметрия между положительными и отрицательными зарядами. Если эта симметрия действительно по природе фундаментальна, всегда должен быть противоположный заряд у любых частиц» [4, с.527].

Примечательно, что существование антипротона было также предсказано советским физиком Яковом Ильичем Френкелем (1894-1952), автором знаменитой капельной модели атомного ядра. Причем Я.И.Френкель в своем предсказании исходил из той же аналогии с существованием позитрона. В книге [5] содержится его письмо, адресованное П.Дираку. В этом письме, написанном весной 1933 года, уже после экспериментального открытия позитрона, Яков Ильич рассуждает, обращаясь к английскому физику: «Что вы думаете о протонах? Если их следует трактовать как элементарные частицы, то тогда мы должны предположить также и существование отрицательных протонов. <...> И если, далее, нейтроны должны трактоваться как элементарные частицы, удовлетворяющие принципу Паули, должны быть также и «антинейтроны», которые соответствуют дыркам в почти заполненном распределении нейтронов в состояниях с отрицательной энергией» [5, с.353].

Это предсказание П.Дирака и Я.И.Френкеля блестяще подтвердилось: антипротон был экспериментально открыт в 1955 г. командой Эмилио Сегре – итальянского физика, когда-то работавшего вместе с Э.Ферми в Риме, но затем перебравшегося в США. Открытие стало возможно благодаря использованию протонного ускорителя на 6 ГэВ. Эта машина, названная беватроном, была запущена в Лаборатории имени Лоуренса в Беркли в 1954 г. А спустя год Э.Сегре и его коллеги уже получили первые антипротоны, обстреливая протонами медную мишень. Что касается антинейтронов, о которых теоретически рассуждал Я.И.Френкель в письме 1933 года, то эти античастицы были обнаружены в 1956 г. на том же протонном ускорителе Вильямом Венцелем, Брюсом Корком, Гленном Ламбертсоном и Орестом Пиччиони [6].

Следует, тем не менее, отметить, что, интерпретируя отрицательные решения, содержащиеся в релятивистском уравнении для электрона, с помощью идеи о новой частице, П.Дирак не мог знать заранее, какова степень справедливости его теоретических построений. Он всего лишь выдвигал гипотезу, которая могла и не подтвердиться. Поэтому не подлежит сомнению, что в истории предсказания и открытия позитрона присутствовал фактор случайности: П.Дираку повезло в том, что его антиэлектрон (а также антипротон) стал предметом успешных лабораторных исследований.

В.С.Кессельман в книге «На кого упало яблоко» [7] повествует: «Наверное, каждый ученый в своей жизни хоть раз сталкивался со «случайным» открытием. Причем не только наблюдатели, но и теоретики. Вспомним, например, предсказание позитрона Дираком, который вовсе не думал о целом мире античастиц, выписывая свое знаменитое уравнение. Такое нередко бывает, когда при численных расчетах часто обнаруживается что-то, что в них не закладывалось» [7]. Об этом же пишет И.Л.Радунская [8]: «...Созданное им волновое уравнение вдруг подкинуло ему античастицу, и та открыла Дираку, первому на земле человеку, антимир. Дирак не был к этому подготовлен, у него никогда не было такого дерзкого намерения, и он долго не мог объяснить своим коллегам столь неожиданного поведения его уравнения» [8].

### **3. Аналогия десятая: идея об использовании формализма Лагранжа в квантовой механике**

Ранее мы говорили, что П.Дирак перенес в квантовую теорию формализм Гамильтона – Якоби, в том числе разработанный Гамильтоном метод канонических преобразований. По аналогии с этим методом П.Дирак сконструировал общую теорию квантово-механических преобразований, которая, кстати, помогла В.Гейзенбергу сформулировать знаменитое соотношение неопределенностей (правило о том, что чем точнее мы определяем значение координаты частицы, тем менее точно мы фиксируем значение ее импульса). Как отмечает Д.Мехра [9], «Дирак создал мощный метод, аналогичный каноническим преобразованиям старой гамильтоновой теории» [9, с.151]. «Гейзенберг в своей знаменитой статье «О наглядном содержании квантово-теоретической кинематики и механики», в которой он ввел соотношения неопределенностей... использовал теорию преобразований Дирака и Иордана, показывая таким образом, что теория преобразований принадлежит к наиболее прочным основаниям квантовой теории» [9, с.150].

Однако в 1933 г. П.Дирак пришел к заключению, что в квантовую механику также можно перенести формализм Лагранжа, основой которого является функция Лагранжа – функция обобщенных координат, способная описывать развитие динамической системы. При использовании данной функции уравнения движения (для классической механики) получаются из принципа наименьшего действия. П.Дирак предположил, что не существует факторов, которые препятствовали бы выводу уравнений движения из того же принципа наименьшего действия в квантовой теории. В результате английский физик опубликовал в 1933 г. статью «Лагранжиан в квантовой механике». Эта статья произвела глубокое впечатление на Ричарда Фейнмана, который, развивая подход П.Дирака, создал метод интегралов по траекториям (по путям), принесший ему Нобелевскую премию по физике за 1965 г.



Таким образом, П.Дирак пришел к мысли о применении функции Лагранжа в квантовой механике по аналогии с использованием данной функции в классической физике. А Ричард Фейнман разработал метод интегралов по траекториям (метод континуального интегрирования), обобщая стратегию, предложенную П.Дираком.

В.И.Санюк и А.Д.Суханов в статье «Дирак в физике XX века» [10] отмечают: «...Наиболее адекватным аппаратом для квантования калибровочных полей оказался именно метод континуального интегрирования, развитый Фейнманом (1948 г.). Отправной точкой для Фейнмана послужила идея Дирака, высказанная еще в 1933 г. в работе [74], согласно которой временную эволюцию квантовой системы за конечный интервал времени можно представить в виде композиции большого числа эволюций по малым временным интервалам» [10, с.976].

Здесь [74] – Dirac P.A.M. The Lagrangian in quantum mechanics // Phys. Z. Sowjetunion. – 1933. – Bd.3. – S.64-72.

Более подробные сведения можно найти в книге Антонио Карретеро «Темная сторона материи» [11], где автор указывает: «В 1933 году Дирак применил «лагранжев формализм», широко используемый в классической механике, к квантовому миру. Он объяснил свой подход тем, что метод Лагранжа в некоторых аспектах оказывается более фундаментальным, нежели анализ, основанный на использовании гамильтониана. Уравнения движения можно получить напрямую из принципа наименьшего действия. Впрочем, лагранжиан может быть легко выражен в релятивистской форме. Статья Дирака «Лагранжиан в квантовой механике» была опубликована в советском журнале и осталась без внимания, пока Ричард Фейнман не открыл ее заново в 1941 году, во время работы над диссертацией. Работы Дирака стали откровением для американского физика. На их основе он развил новую формулировку квантовой механики – «формулировку через интеграл по траекториям» [11, с.123].

#### 4. Ценность идей П.Дирака

Помимо того, что В.Гейзенберг использовал теорию преобразований П.Дирака при формулировке соотношения неопределенностей, а Р.Фейнман ассимилировал описанный выше подход П.Дирака при создании метода континуального интегрирования, можно указать множество других фактов, свидетельствующих о плодотворности работ английского физика. Так, статистика Ферми – Дирака помогла А.Зоммерфельду (1927) разработать первую квантовую теорию металлов. Для описания поведения электронов в металле он применил функцию распределения Ферми – Дирака вместо функции Максвелла – Больцмана, которая использовалась ранее П.Друде и Х.Лоренцем [12].

Та же статистика Ферми – Дирака подсказала Р.Фаулеру, научному руководителю П.Дирака, путь построения теории белых карликов – звезд, состоящих из электронно-ядерной плазмы, лишенных источников термоядерной энергии и светящихся благодаря своей тепловой энергии. Р.Фаулер по аналогии перенес в теорию этих звезд статистику Ферми – Дирака и за счет этого объяснил роль давления вырожденного газа электронов в недрах этих астрофизических объектов [13, 14].

Введенные П.Дираком в квантовую теорию операторы рождения и уничтожения частиц были использованы Э.Ферми (1934) при построении теории бета-распада атомных ядер. Как говорит Б.Понтекорво об этой теории Э.Ферми, «Ферми возвел свое столь совершенное строение лишь на основе нескольких экспериментальных результатов по бета-распаду тяжелых ядер и **аналогии** с дираковской теорией электромагнитного излучения» [15, с.688].

Электрон-дырочная концепция, предложенная П.Дираком для обоснования идеи о существовании антиэлектрона (позитрона), была перенесена Я.И.Френкелем в теорию твердого тела, а именно в теорию полупроводников и диэлектриков. В.Я.Френкель говорит об этой

экстраполяции, осуществленной его отцом в 1926 г.: «Подвижные дырки – вакантные места и понятие об их движении были с успехом перенесены на электронную теорию твердых тел» [12, с.123]. «Соответствие между введенным Дираком понятием позитрона как дырки в океане электронов с отрицательной энергией и дыркой в кристаллической решетке (по Френкелю) представляется очевидным» [12, с.124].

Метод квантования электромагнитного поля, созданный П.Дираком и развитый В.А.Фоком и Б.Я.Подольским, был перенесен советским физиком М.П.Бронштейном (1935) в теорию гравитационного поля. Иначе говоря, М.П.Бронштейн проквантовал гравитационные волны, опираясь на идеи П.Дирака [16]. В.А.Фок и Д.Д.Иваненко обобщили уравнение П.Дирака для электрона, записав его в искривленном пространстве общей теории относительности [17], что явилось важным результатом, вошедшим в современные учебники по теории гравитации.

## 5. Заключение

В начале 1990-х годов ученые университета Пармы (Италия) под руководством Джакомо Риццолатти и Витторио Галлезе опубликовали ряд исследований, в которых сообщили об открытии зеркальных нейронов. Эти нейроны активировались в мозге подопытных животных (обезьян) не только тогда, когда животное выполняло определенное действие, но и в том случае, когда оно наблюдало за тем, как другие сородичи выполняли то же самое действие. Иначе говоря, опыты, проводимые итальянскими нейробиологами, показывали, что при выполнении определенного двигательного акта в коре полушарий мозга обезьян (макак) возбуждаются и начинают «работать» те же нервные клетки, что и при визуальном восприятии этого двигательного акта. Впоследствии зеркальные нейроны были обнаружены и в мозге человека. Некоторые исследователи назвали открытие зеркальных нейронов

революционным событием в науке о мозге. Детали этого открытия, которое было сделано случайно (непреднамеренно), анализируются во множестве источников [18, 19, 20, 21, 22, 23].

Дж.Риццолатти и его коллеги предположили, что зеркальные нейроны должны играть важную роль в имитации (подражании) и понимании действий других людей. Возникла идея, что эти нейроны необходимы для социальных взаимодействий во многих их аспектах, в том числе для понимания чужих намерений и умонастроений, а также для реализации чувства эмпатии (сопереживания, сочувствия, эмоциональных оценок). Американский исследователь В.Рамачандран (2000) высказал гипотезу о существовании связи между функционированием зеркальных нейронов и детским аутизмом, характеризуемым дефицитом социальных навыков. По его мнению, аутизм – расстройство, обусловленное дисфункцией системы зеркальных нейронов [24]. Далее В.Рамачандран предположил, что зеркальные нейроны, будучи «нейронами эмпатии», сформировали нашу культуру и цивилизацию. Эта идея подробно рассматривается в его книге «Мозг рассказывает» [25], а именно в 4-й главе под названием «Нейроны, которые определили цивилизацию». Согласно В.Рамачандрану, большие скачки, происходившие в культурной эволюции людей, были результатом развития системы зеркальных нейронов.

В настоящее время концепция зеркальных нейронов как факторов, ответственных за все аспекты социального взаимодействия людей, в том числе за культурную эволюцию общества, подвергается серьезной критике. Некоторые работы, в которых проводится критический разбор гипотез, «возложивших» на зеркальные нейроны все мыслимые социальные функции, рассматриваются в книге Р.Сапольского «Биология добра и зла» [26].

На наш взгляд, человеческая цивилизация сформирована не зеркальными нейронами, открытыми Дж.Риццолатти и его сотрудниками, а нейронами аналогии – клетками мозга, которые постоянно сопоставляют разные идеи (фрагменты информации), выявляют сходство между ними для того, чтобы в

дальнейшем идеи, относящиеся к одной области знаний, перенести в другую. Основной принцип работы нейронов аналогии – ассоциативное взаимодействие между ансамблями нейронов, хранящими разную информацию. Биологическим механизмом этого взаимодействия является фазовая и амплитудно-фазовая синхронизация между нейронами, которая устанавливается, если разные пласты информации, хранимые нейронными ансамблями, похожи в каких-то аспектах (признаках). Ключевая стадия мыслительной операции аналогии – момент, при котором человек, размышляя над одной идеей, вспоминает другую. Например, когда П.Дирак размышлял над коммутатором В.Гейзенберга, он ассоциативно вспомнил о скобках Пуассона, и именно этот момент обусловил процесс выявления аналогии между результатами В.Гейзенберга и идеями С.Д.Пуассона и дальнейший процесс переноса скобок Пуассона в квантовую механику. Поскольку ассоциативные воспоминания играют центральную (критически важную) роль в реализации аналогии, не подлежит сомнению, что нейроны аналогии – это нейроны памяти. Мозг экономит свои ресурсы: его клетки, выполняющие функцию хранения массы сведений, одновременно выполняют функцию обработки этих сведений (функцию мышления).

Роль интеллектуальной операции аналогии, позволяющей осуществлять синтез (комбинирование) информации и инициировать то, что называется «трансфером идей», уже начинает рассматриваться в контексте развития нашей цивилизации. Так, недавно в журнале «Trends in Cognitive Sciences» появилась статья с весьма характерным названием «Аналогия как катализатор кумулятивной культурной эволюции» [27]. Авторы данной работы подчеркивают: «Мы утверждаем, что построение **аналогий** сыграло решающую роль в эволюции кумулятивной культуры, позволив людям изучать и передавать сложные поведенческие последовательности (паттерны), которые в противном случае были бы непрозрачны для усвоения» [27, с.450].

## Литература

1. Ельяшевич М.А. От возникновения квантовых представлений до становления квантовой механики // Успехи физических наук. – 1977. - Том 122. - № 4. - С.673-717.
2. Вентцель Г. Квантовая теория полей (до 1947 г.) // сборник «Теоретическая физика 20 века». – М.: изд-во иностранной литературы, 1962. - С.60-93.
3. Кузнецов Б.Г. Развитие физических идей от Галилея до Эйнштейна в свете современной науки. – М.: «Либроком», 2010. – 520 с.
4. Дирак П.А.М. Теория электронов и позитронов // сборник «Лауреаты Нобелевской премии по физике: биографии, лекции, выступления». Том 1. Под ред. Б.П.Захарчени и Э.А.Троппа. – Санкт-Петербург: «Наука», 2005. - С.523-527.
5. Френкель Я.И. Воспоминания, письма, документы. – Ленинград: «Наука», 1986. – 492 с.
6. Корк Б., Ламбертсон Г., Пиччиони О., Вензел В. Антинейтроны, полученные путем перезарядки антипротонов // Успехи физических наук. – 1957. – Том 62. - № 4. – С.385-390.
7. Кессельман В.С. На кого упало яблоко. Настоящая история великих открытий. – М.: «Ломоносов», 2014. – 208 с.
8. Радунская И.Л. Четыре жизни академика Берга. – М.: «Московские учебники», 2007. – 479 с.
9. Мехра Д. «Золотой век теоретической физики»: научная деятельность П.А.М. Дирака с 1924-го по 1933 год // Успехи физических наук. – 1987. – Том 153. - № 1. – С.135-165.
10. Санюк В.И., Суханов А.Д. Дирак в физике XX века (к 100-летию со дня рождения) // Успехи физических наук. – 2003. - Том 173. - № 9. - С.965-984.

11. Каррето А. Темная сторона материи. Дирак. Антивещество. – М.: изд-во «Де Агостини», 2015. – 160 с.
12. Френкель В.Я. Яков Ильич Френкель. – Москва-Ленинград: «Наука», 1966. – 473 с.
13. Чандрасекар С. О возрастающем значении общей теории относительности для астрономии // Успехи физических наук. - 1974. – Том 112. - № 2. – С.309-323.
14. Чандрасекар С. О звездах, их эволюции и устойчивости // Успехи физических наук. – 1985. – Том 145. - № 3. – С.489-506.
15. Понтекорво Б.М. Страницы развития нейтринной физики // Успехи физических наук. – 1983. – Том 141. - № 4. – С.675-709.
16. Горелик Г.Е., Френкель В.Я. Матвей Петрович Бронштейн. – М.: «Наука», 1990. – 272 с.
17. Владимиров Ю.С. Между физикой и метафизикой. Том 2. – М.: «Либроком», 2011. – 248 с.
18. Галлезе В., Риццолатти Д., Фогасси Л. Зеркальная часть мозга // В мире науки. – 2007. - № 3. – С.22-29.
19. Риццолатти Дж., Синигалья К. Зеркала в мозге. О механизмах совместного действия и сопереживания. – М.: «Языки славянских культур», 2012. – 208 с.
20. Костанди М. Мозг человека. 50 идей, о которых нужно знать. – М.: «Фантом Пресс», 2016. – 208 с.
21. Соколов П.А. Активность системы зеркальных нейронов по данным ФМРТ при просмотре и воображении видеосюжетов // Диссертация на соискание ученой степени кандидата биологических наук. – М.: Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, 2014. – 114 с.
22. Зайцева Ю.С. Зеркальные клетки и социальная когниция в норме и при шизофрении // Социальная и клиническая психиатрия. – 2013. – Том 23. - № 2. – С.96-105.

23. Базян А.С. Зеркальные нейроны, физиологическая роль, особенности функционирования и эмоционально насыщенная когнитивная карта мозга // Успехи физиологических наук. – 2019. – Том 50. - № 2. – С.42-62.
24. Рамачандран В., Оберман Л. Разбитые зеркала: теория аутизма // В мире науки. – 2007. – № 3. – С.30-37.
25. Рамачандран В. Мозг рассказывает. Что делает нас людьми. – М.: «Карьера Пресс», 2013. – 395 с.
26. Сапольски Р. Биология добра и зла. Как наука объясняет наши поступки. – М.: «Альпина нон-фикшн», 2019. – 766 с.
27. Brand C.O., Mesoudi A., Smaldino P.E. Analogy as a catalyst for cumulative cultural evolution // Trends in Cognitive Sciences. – 2021. – Vol.25 (6). – P.450-461.