УДК 51

Фаргиева Аминат Хамзатовна,
студент
Ингушский Государственный Университет
РФ, г. Магас
Научный руководитель: Танкиев Исмаил Аюпович
Канд. физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. «Математический анализ»
Ингушский государственный университет
РФ, г. Магас

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. *Данная методическая работа посвящена ознакомлению с некоторыми методами решения диофантовых уравнений. Теория решения подобных уравнений является классическим разделом элементарной математики. Данные уравнения рассматриваются даже в начальной школе, поэтому данная разработка может быть полезной при внеклассной работе в школе.*

Ключевые слова: *Диофант Александрийский, диофантовы уравнения, методы, решения, выделение полного квадрата, неравенства, оценка выражений.*

Fargieva Aminat Hamzatovna, student
Ingush State University
Russian Federation, Magas
Tankiev Ismail Ayupovich, scientific adviser
Candidate of physical and mathematical sciences, professor, head of the department "Mathematical Analysis"
Ingush State University
Russian Federation, Magas

ON METHODS FOR SOLVING DIOPHANTINE EQUATIONS

Abstract. *This methodological work is devoted to familiarization with some methods for solving Diophantine equations. The theory of solving such equations is a classic branch of elementary mathematics. These equations are considered even in elementary school, so this development can be useful for extracurricular work at school.*

Keywords: *Diophantus of Alexandria, diophantine equations, methods, solutions, full square allocation, inequalities, expression estimation.*

Диофантовы уравнения – это алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых необходимо найти целые или рациональные решения. Причем число неизвестных в уравнениях должно быть не менее двух (если не ограничиваться только целыми числами). Диофантовы уравнения имеют много решений, по этой причине их называют неопределенными уравнениями.

История

Диофантовы уравнения связаны с именем древнегреческого математика Диофанта Александрийского. О подробностях его жизни почти ничего не известно. В одном случае, Диофант цитирует Гипсикла (2 век до нашей эры); в другом - о Диофанте пишет Теон Александрийский (около 350 года нашей эры). Отсюда можно сделать вывод о том, что его жизнь проходила в границах этого периода. Возможное конкретизирование времени жизни Диофанта обосновано тем, что его «Арифметика» посвящена «достопочтеннейшему Дионисию». Предполагают, что Дионисий - епископ Дионисий Александрийский, который жил в середине 3 века нашей эры. В Палатинской антологии содержится эпиграмма-задача, в которой сообщается:

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей и камень

Мудрым искусством его скажет усопшего век.

Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком.

И половину шестой встретил с пушком на щеках.

Только минула седьмая, с подругой он обручился.

С нею, пять лет, проведя, сына дождался мудрец;

Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.

Отнят он был у отца ранней могилой своей.

Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,

Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Решение данной задачи наводит на мысль о том, что Диофант прожил 84 года. До нас дошли 7 книг Диофанта из (возможно) 13, которые были объединены в сборник задач (их всего 189) под названием «Арифметика», каждая из которых обеспечивает решением и необходимым пояснением.

Метод, основанный на выделении полного квадрата

Пример №1

Найти все целочисленные решения уравнения:

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 29$$

Решение:

Преобразуем левую часть уравнения, выделив полные квадраты:

$x^2 - 6xy + 13y^2 = (x^2 - 6xy + 9y^2) + 4y^2 = (x - 3y)^2 + 2^2 = 29,$

Значит, $(2y)^2 \leq 29$

Получаем, что y может быть равен 0; ±1; ±2

1. $y = 0$

$(x - 0)^2 = 29$. Не имеет решений в целых числах.

2. $y = -1$

$(x + 3)^2 + 4 = 29$

$(x + 3)^2 = 25$

$x + 3 = 5$ или $x + 3 = -5$

$x = 2$ или $x = -8$

3. $y = 1$

$(x + 3)^2 + 4 = 29$

$(x-3)^2=25$

$x-3=5$ или $x-3=-5$

$x = 8$ или $x = -2$

4. y = −2.

$(x+6)^2+16=29$, $(x+6)^2=13$. Нет решений в целых числах.

5. $y=2$.

$(x-6)^{\,2}+16= 29$, $(x-6)^2=13$. Нет решений в целых числах. *Ответ:* $(2;-1);\ (-8;-1);\ (8;1);\ (-2;1)$.

Пример №2

Найти все пары целых чисел p и q, которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} p^2+q^2<2p-4q+4 \\ p^2+q^2<4p-4q+2. \end{cases}$$

Решение:

Выделим полные квадраты в каждом из неравенств:

$$\begin{cases} (p^2-2p+1)+(q^2+4q+4)-5<4, \\ (p^2+4p+4)+(q^2-4p+4)-8<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-1)^2+(q+2)^2<9, \\ (p+2)^2+(q-2)^2<10 \end{cases}$$

Учитывая, что $p,q\in Z$, из последней системы неравенств получим следующие ограничения:

$$\begin{cases} -2<p<4 \\ -5<q<1 \\ -5\le p\le 1 \\ -1\le q\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le p\le 3 \\ -5\le p\le 1 \\ -4\le q\le 0 \\ -1\le q\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le p\le 1 \\ -1\le q\le 0 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь все возможные значения, которые может принимать q.

Пусть $q=0$, тогда система $\begin{cases} (p-1)^2+(q+2)^2<9, \\ (p+2)^2+(q-2)^2<10 \end{cases}$ примет вид:

$\begin{cases} (p-1)^2<5 \\ (p+2)^2<6, \end{cases}$ откуда $p=0$ или $p=-1$.

Пусть $q=-1$, тогда система $\begin{cases} (p-1)^2+(q+2)^2<9, \\ (p+2)^2+(q-2)^2<10 \end{cases}$ примет вид:

$\begin{cases}(p-1)^2 < 8\\(p+2)^2 < 1.\end{cases}$ У второго равенства этой системы нет решений в целых числах.

Ответ: $(0;0),(-1;0)$.

Метод, основанный на оценке выражений, входящих в уравнение

Пример № 1

Решить в целых числах уравнение:

$$(x^2+4)(y^2+1)=8xy$$

Решение:

Заметим, что если $(x_0;y_0)$ – решение уравнения, то $(-x_0,-y_0)$– тоже решение. А так как $x=0$ и $y=0$ не являются решением уравнения, то, разделив обе части уравнения на xy, получим:

$$\frac{x^2+4}{x}\times\frac{y^2+1}{y}=8,$$

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=8$$

Пусть $x>0, y>0$, тогда, согласно неравенству Коши

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\times x_2\times\ldots\times x_n}$$

Получаем:

$$x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{4}{x}=4,}$$

$$y+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{y\times\frac{1}{y}=2,}$$

Тогда их произведение

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=4\times 2=8,$$

Значит,

$$x+\frac{4}{x}=4 \text{ и } y+\frac{1}{y}=2$$

Отсюда находим $x = 2$ и $y = 1$ – решение, значит $x = -2$ и $y = -1$ – тоже решение.

Ответ: $(2; 1)$; $(-2; -1)$.

Пример № 2

Найти все натуральные числа m и n, которые удовлетворяют равенству:

$$(n!)^{m}! - (m!)^{n}! = 28$$

(Запись $k!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до k включительно.)

Решение:

Ясно, что $m = n$, иначе выражение в левой части уравнения равно 0, а не 28. Если $m > n$, то $m! = 1 \times \ldots \times n \times \ldots \times m$. Значит, $m!$ делится на n. Так как $n! = 1 \times \ldots \times n$, то и $m!$ делится на n. Следовательно, можно обозначить $n! = an$ и $m! = bn$ для некоторых натуральных a и b. Тогда заданное уравнение запишется как $(an)^{bn} - (bn)^{an} = 28$, откуда следует, что n^{n}делит 28. Единственные значения n, для которых это возможно, 1 или 2. Значение $n = 1$ не подходит (так как левая часть исходного уравнения в этом случае отрицательна). Если $n = 2$, то уравнение принимает вид $2^{k} - k^{2} = 28$, где через k обозначен $m!$. Из этого равенства вытекает, что k четно. Т.е. $k = 2q$ для некоторого натурального q. Поэтому равенство перепишется в виде $2^{2q} - (2q)^{2} = 28$, или по формуле разности квадратов $(2^{q} + 2q)(2^{q} - 2q) = 28$, откуда, сократив на 4, получим $(2^{q-1} + q)(2^{q-1} - q) = 7$. Так как единственными положительными делителями 7 являются 1 и 7, то последнее равенство равносильно системе $\begin{cases} 2^{q-1} + q = 7 \\ 2^{q-1} - q = 1 \end{cases}$. Вычитая почленно из первого уравнения этой системы второе ее уравнение, получим $2q = 6$, откуда $q = 3$. Непосредственно проверкой убеждаемся, что $q = 3$ является решение системы. Значит, $k = 6$, а поскольку $6 = 3!$, то $m = 3$. Если $n > m$, то аналогично, $m = 1$ или $m = 2$. В первом случае $(m = 1)$ получим $n! = 29$ – нет решений. Во втором случае ($m = 2$) имеем: $(n!)^2 - 2^{n!} = 28$, что невозможно, так как $a^2 - 2 \leq 0$.

Ответ: $n = 2, m = 3$.

Заключение:

Работа несет методический характер и может быть полезной в различных кружковых работах (по математике).

Список литературы:

1. Абакумова, С.И. Диофантовы уравнения / С.И. Абакумова, А.Н. Гусева // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире. – 2014 – Т. 1, №6. – С. 133–137.

2. Базылев Д.Ф. Справочное пособие к решению задач: диофантовы уравнения. – Минск: НТЦ «АПИ», 1999 г.

3. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: «Наука», 1972 г.

4. Гринько Е.П., Головач А.Г. Учебно-методическое пособие. Методы решения диофантовых уравнений при подготовке школьников к олимпиаде. Брест БрГУ имени А.С. Пушкина, 2013

5. Фалин Г.И., Фалин А.И. Линейные диофантовы уравнения. М., Изд-во Чистые Пруды, 2008, 32 с. (библиотечка "Первого Сентября", серия математика, вып.24).