УДК 519.872.2

Гаврилова Л.И.,
кандидат физико-математических наук
преподаватель
Частное профессиональное образовательное учреждение
«Газпром техникум Новый Уренгой»
Россия, г. Новый Уренгой
Антонова К.А.,
студент
3 курс, «Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям)»
Частное профессиональное образовательное учреждение
«Газпром техникум Новый Уренгой»
Россия, г. Новый Уренгой

ПУАССОНОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НА ПРИМЕРЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВТОСТОЯНКИ

Аннотация: *В статье рассматривается математическая модель функционирования автостоянки, приводятся расчеты по математической модели процесса массового обслуживания и анализ полученных результатов.*

Ключевые слова: *пуассоновский поток событий, массовое обслуживание, поток заявок, плотность распределения, уравнение баланса.*

Annotation: *The article considers a mathematical model of the functioning of a parking lot, provides calculations for a mathematical model of the queuing process and analyzes the results obtained.*

Key words: *Poisson flow of events, queuing, flow of requests, distribution density, balance equation.*

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени (например, поток отказов элементов, поток вызовов на телефонной станции, поток посетителей в кафе, поток обслуживаемых абонентов и др.). *Простейшим (или пуассоновским) потоком* называется такой поток событий, обладающий следующими свойствами [1, с.141]:

- свойством стационарности: вероятность того, что за промежуток времени длины τ произойдет ровно k событий, не зависящих от начала его отсчета;

- свойством ординарности: событие появляется не группами, а поодиночке;

- свойством отсутствия последствия: вероятность появления k событий за промежуток времени длины τ не зависит от того, сколько событий появилось в любой другой не пересекающийся с ним промежуток времени.

Простейшей одноканальной моделью с вероятностными входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания. При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид [2, с. 637]:

$$f_1(x) = \lambda\, e^{-\lambda x},$$

плотность распределения длительностей обслуживания:

$$f_2(x) = \mu\, e^{-\mu x},$$

где λ - интенсивность поступления заявок в систему, μ - интенсивность обслуживания. Потоки заявок в обслуживании простейшие.

Модель процесса массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди заявок (требований) на обслуживание, возникают следующим образом:

1) поступившая в обслуживающую систему, заявка присоединяется к очереди других (ранее поступивших) заявок;

2) канал обслуживания выбирает заявку из находящихся в очереди, с тем, чтобы приступить к его обслуживанию;

3) после завершения процедуры обслуживания очередной заявки канал обслуживания приступает к обслуживанию следующей заявки, если такая имеется в блоке ожидания.

Цикл функционирования подобных систем массового обслуживания повторяется многократно в течение всего периода работы обслуживающей системы. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередной заявки после завершения обслуживания предыдущей заявки происходит мгновенно, в случайные моменты времени. Случайный характер потока заявок и длительность обслуживания приводит к тому, что в системе массового обслуживания происходит случайный процесс.

Постановка задачи. Пусть автостоянка для посетителей кафе имеет 6 мест. Автомобили пребывают на стоянку в соответствии с распределением Пуассона с интенсивностью 10 автомобилей в час. Время пребывания автомобилей на стоянке является экспоненциально распределенной случайной величиной со средним значением 45 минут. Количество временных мест для ожидания на территории стоянки имеется 4. Если стоянка и все места для ожидания заполнены, то прибывшие автомобили вынуждены искать другую автостоянку.

Требуется определить следующее: вероятность того, что в системе находится n автомобилей; эффективную интенсивность $\lambda_{эфф}$ поступления автомобилей на стоянку; среднее количество L_s автомобилей на стоянке; среднее время $T_о$ нахождения автомобиля в очереди на территории стоянки; среднее количество $\bar{c}$ занятых мест на автостоянке.

Место для стоянки в рассматриваемой задаче выступает в роли сервиса, поэтому система имеет всего шесть средств обслуживания (c=6). Максимальная вместимость системы равна 6+4=10 автомобилей.

Обозначим:

n – число автомобилей в системе;

λ_n – интенсивность поступления в систему автомобилей при условии, что в системе уже находится n автомобилей;

μ_n - интенсивность выходного потока обслуженных автомобилей при условии, что в системе уже находится n автомобилей;

p_n - вероятность того, что в системе находится n автомобилей.

Из условия задачи имеем, что $\lambda_n = 10, n = 0, 1, 2, \dots, 10$, и

$$\mu_n = \begin{cases} n\left(\frac{60}{45}\right) = \frac{4}{3}n \text{ автомобилей в час}, n = 1, 2, \dots, 6, \\ 6\left(\frac{60}{45}\right) = 8 \text{ автомобилей в час}, n = 7,8, \dots, 10. \end{cases}$$

В общей системе массового обслуживания установлена зависимость вероятности p_n от интенсивностей λ_n и μ_n в виде уравнения баланса [2, с. 645]

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)p_n, \quad n = 1, 2, \dots, 10.$$

Уравнение баланса, соответствующее $n = 0$, имеет вид $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$. Уравнение баланса решаются рекуррентно, последовательно выражая вероятности p_i через p_0 следующим образом:

для $n = 0$ $$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right)p_0,$$

для $n = 1$ $$p_2 = \left(\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\right)p_0,$$

для $n = 3,4, \dots$ $$p_n = \left(\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}\right)p_0.$$

Значение p_0 определяется из уравнения суммы всех вероятностей

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1.$$

Определим вероятности p_n по выше представленным формулам, подставляя постоянную $\lambda_n = 10$ и соответствующие μ_n, получим

$$p_n = \begin{cases} \left(10 \cdot \frac{3}{4}\right)^n \frac{p_0}{n!}, & n = 1, 2, \dots, 6, \\ \left(10 \cdot \frac{3}{4}\right)^n \frac{p_0}{6!} \left(\frac{5}{4}\right)^{n-6}, & n = 7,8, \dots, 10. \end{cases}$$

Значение p_0 определим из уравнения суммы вероятностей при $n = 10$, в результате получим $p_0 = 0{,}000406$. Далее вычислим $p_1 = 0{,}00304$, $p_2 = 0{,}01142$, $p_3 = 0{,}02852$, $p_4 = 0{,}05348$, $p_5 = 0{,}08021$, $p_6 = 0{,}10027$, $p_7 = 0{,}12534$, $p_8 = 0{,}15667$, $p_9 = 0{,}19584$, $p_{10} = 0{,}24480$.

Автомобили поступают на стоянку с интенсивностью λ. Прибывающий автомобиль может поступить на стоянку с интенсивностью $\lambda_{эфф}$ или уехать в поисках другой автостоянки с интенсивностью $\lambda_{потери}$, т.е. $\lambda = \lambda_{эфф} + \lambda_{потери}$. Автомобиль не может въехать на стоянку, если там уже 10 автомобилей, что означает, часть автомобилей, которые не попадут на стоянку, пропорциональна p_{10}. Получим $\lambda_{потери} = \lambda p_{10} = 2{,}448$ автомобилей в час, $\lambda_{эфф} = \lambda - \lambda_{потери}$, т.е.

$\lambda_{эфф} = 10 - 2{,}448 = 7{,}552$ автомобилей в час.

Среднее количество L_s автомобилей на стоянке определяется через сумму $L_s = \sum_{k=1}^{n} kp_k = 7{,}66739$ автомобилей.

Автомобиль, ожидающий свободного места для стоянки, находится в очереди. Время его ожидания $\text{Т}_\text{о}$ вычислим через время пребывания автомобиля на стоянке (в системе) Т_s. Так как $\text{Т}_s = \frac{L_s}{\lambda_{эфф}} = 1{,}01554$ часа, то по определению $\text{Т}_\text{о} = \text{Т}_s - \frac{1}{\mu} = 0{,}26528$ часа.

Среднее число $\overline{\text{c}}$ занятых мест на автостоянке определяется по формуле [2, с. 652] $\overline{\text{c}} = \frac{\lambda_{эфф}}{\mu}$, получим $\overline{\text{c}} = 6{,}0416$ мест. Можно рассчитать коэффициент использования мест на стоянке - $\frac{\text{c}}{\text{c}}$ = 1,0069.

Итак, вероятность того, что в системе находится *n* автомобилей:

$p_0 = 0{,}000406$, $p_1 = 0{,}00304$, $p_2 = 0{,}01142$, $p_3 = 0{,}02852$,

$p_4 = 0{,}05348$, $p_5 = 0{,}08021$, $p_6 = 0{,}10027$, $p_7 = 0{,}12534$,

$p_8 = 0{,}15667, p_9 = 0{,}19584, p_{10} = 0{,}24480$;

эффективная интенсивность $\lambda_{эфф} = 7{,}55$ автомобилей, поступивших на стоянку; среднее количество $L_s = 7{,}67$ автомобилей на стоянке; среднее время $Т_о = 16{,}2$ мин нахождения автомобиля в очереди на территории стоянки; среднее количество $\overline{c}$ =6,04 занятых мест на автостоянке, эффективность использования мест на стоянке составляет 101,7%.

Список литературы:

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учеб. пособие для студ. втузов. – 2-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2001. - 208 с.
2. Таха Хемди А. Введение в исследование операций // Пер. с англ. - М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. - 912 с.