УДК 519.863

Хваржев Владислав Муратович,
студент
4 курс, Институт информационных технологий и инноваций
НАН ЧОУ ВО Академия маркетинга и социально-информационных технологий- ИМСИТ (г. Краснодар)
Россия, г. Краснодар
Нестерова Н.С.,
кандидат технических наук, доцент
доцент кафедры «Математика и вычислительная техника»
НАН ЧОУ ВО Академия маркетинга и социально-информационных технологий- ИМСИТ (г. Краснодар)
Россия, г. Краснодар

МЕТОД РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация: *Статья посвящена разработке программного обеспечения для решения задач безусловной оптимизации методом релаксации.*

Ключевые слова: *метод, оптимизация, схема алгоритма, направление градиента.*

Annotation: *The article is devoted to the development of software for solving problems of unconditional optimization by relaxation method.*

Key words: *method, optimization, algorithm scheme, the direction of the gradient.*

Лица, принимающие решения, обычно сталкиваются с оптимизационными задачами различного характера, для которых применяются достаточно трудоемкие численные методы.

Поэтому наличие инструмента, позволяющего автоматизировать процесс поиска оптимального варианта весьма актуально.

В статье приведено описание программного обеспечения для решения оптимизационных задач методом релаксации.

Алгоритм метода заключается в отыскании осевого направления, вдоль которого целевая функция уменьшается наиболее сильно (при поиске минимума). Рассмотрим задачу безусловной оптимизации.

$$I(x_1, \ldots, x_n) \to \min.$$

Для определения осевого направления в начальной точке $x^{\to 0} = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ поиска из области D_x определяются производные $\frac{\partial I(\vec{x})}{\partial x_i}, i = \overline{1,n}$ по всем независимым переменным. Осевому направлению соответствует наибольшая по модулю производная $max\left|\frac{\partial I(\vec{x}^0)}{\partial xi}\right|$.

Пусть x_j – осевое направление, т.е $\left|\frac{\partial I(\vec{x}^0)}{\partial xi}\right| > \left|\frac{\partial I(\vec{x}^0)}{\partial xi}\right| vi \neq j.$

Если знак производной $\frac{\partial I(\vec{x}^0)}{\partial xi}$ отрицательный, функция $I(\overline{x})$ убывает в направлении оси, если положительный – в обратном направлении:

$I(\vec{x})$ возрастает $\leftarrow \frac{\partial I(\vec{x}^0)}{\partial xi} < 0 \to I(\overline{x})$ убывает,

$I(\vec{x})$ убывает $\leftarrow \frac{\partial I(\vec{x}^0)}{\partial xi} > 0 \to I(\overline{x})$ возрастает.

В точке $x^{\to 0} = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ вычисляют $\vec{x}^0$. По направлению убывания функции $I(\vec{x})$ производят один шаг, определяют $I(\vec{x}^1)$ и в случае улучшения критерия шаги продолжают до тех пор, пока не будет найдено минимальное значение по выбранному направлению. В этой точке вновь определяют производные по всем переменным, за исключением той, по которой осуществляется спуск. Снова находят осевое направление наиболее быстрого убывания $I(\vec{x})$, по которому производят дальнейшие шаги и т.д.

Эту процедуру повторяют до тех пор, пока не достигается оптимальная точка, при движении из которой по любому осевому направлению дальнейшего убывания $I(\vec{x})$ не происходит. На практике критерием окончания поиска служит условие

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial I(\vec{x})}{\partial xj}\right)^2 < \delta, \qquad (1)$$

которое при $\delta \to 0$ превращается в точное условие равенства нулю производных в точке экстремума. Естественно, условие (1) может быть использовано только в том случае, если оптимум лежит внутри допустимой области изменения независимых переменных $\vec{x}$, критерий типа (1) непригоден и вместо него следует применять положительность всех производных по допустимым осевым направлениям.

Алгоритм спуска для выбранного осевого направления может быть записан так

$$x_j^{(k+1)} = x_j^k \pm h^{(k+1)} sign \frac{\partial I(\vec{x}(P))}{\partial x}, \qquad (2)$$

где x_j^k – значение варьируется переменной на каждом шаге спуска;

$h^{(k+1)}$ – величина k+1 шага, которая может изменяться в зависимости от номера шага:

sign z – функция знака z;

$\vec{x}^{(p)}$ – вектор точки, в которой последний раз производилось вычисление производных $I(\vec{x})$;

Знак «+» в алгоритме (2) принимают при поиске max I, а знак «-» - при поиске min I. Чем меньше шаг h, тем больше количество вычислений на пути движения к оптимуму. Но при слишком большой величине h вблизи оптимума необходимо, чтобы выполнялось условие h <E, где E – заданная погрешность определения положения оптимума.

Простейший алгоритм изменения шага h состоит в следующем. В начале спуска задается шаг $h^{(0)}$ равный, например, 10% от диапазона d изменения x_j. С этим шагом производят спуск по выбранному направлению до тех пор, пока выполняется условие для двух последующих вычислений

$$I(\vec{x}^k) < I(\vec{x}^{k-1}).$$

При нарушении условия на каком-либо шаге направления спуска на оси изменяется на обратное и спуск продолжается из последней точки с уменьшенной вдвое величиной шага.

Формальная запись этого алгоритма, следующая:

$$h^{(k+1)} = \begin{cases} h^k, \text{если} I(\vec{x}^k) < I\left(\vec{x}^{(k-1)}\right), \\ \frac{-h^{(k)}}{2}, \text{если} I(\vec{x}^k) \geq I\left(\vec{x}^{(k-1)}\right). \end{cases} \qquad (3)$$

В результате использования такой стратегии шаг спуска будет уменьшаться в районе оптимума по данному направлению и поиск по направлению можно прекратить, когда $\left|h^{(k)}\right|$ станет меньше Е. Затем отыскивают новое осевое направление и начальный шаг для дальнейшего спуска, обычно меньший пройденного вдоль предыдущего осевого направления. Улучшение алгоритма поиска по данному методу может быть достигнуто путем применения методов однопараметрической оптимизации.

При этом может быть предложена схема решения задачи:

$$I = I(x_0, \dots, x_n) \to min.$$

Шаг 1. x_j – осевое направление, x_j = var

$$x_j^{(1)} = x_j^0 - h^{(1)} sign \frac{\partial I(\vec{x}_0)}{\partial x_j}; x_j^{(1)} = x_j^0 - h^{(1)}, \text{если} \frac{\partial I(\vec{x}_0)}{\partial x_j} > 0;$$

$$x_j^{(1)} = x_j^0 + h^{(1)}, \text{есди} \frac{\partial I(\vec{x}_0)}{\partial x_j} < 0;$$

$$I = I\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{j-1}^0, h^{(1)} sign \frac{\partial I(\vec{x}_0)}{\partial x_j}, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0\right) \to min \Rightarrow x_{j\text{опт}}^{(1)};$$

Или

$$I = I\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_j, x_{j-1}^0, \dots, x_n^0\right) \to min \Rightarrow x_{j\text{опт}}^{(1)};$$

$$D_x = \begin{cases} \left[x_{j_{min}}, x^0\right], \text{если} \dfrac{\partial I(\vec{x}^0)}{\partial x_j} > 0, \\ \left[x^0, x_{j_{max}}\right], \text{если} \dfrac{\partial I(\vec{x}^0)}{\partial x_j} < 0. \end{cases}$$

$$x_{j\text{опт}}^{(1)} = x_j^0 - h_{\text{опт}}^1 sign \frac{\partial I(\vec{x}^0)}{\partial x_j};$$

Шаг 2. x_e – новое осевое направление; x_e = var

$$x_e^p = x_e^0 - h^2 sign \frac{\partial I(\vec{x}^0)}{\partial x_j};$$

$$I^{(2)} = I\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_e^0 - h\frac{\partial I(\vec{x}^1)}{\partial x_\lambda}, x_{\lambda+1}^0, \dots, x_j^1, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0\right) \to min \Rightarrow h_{\text{опт}}^{(2)};$$

$$x_e^{(1)} = x_e^0 - h_i^{(2)} sign \frac{\partial I(\vec{x}^1)}{\partial x_\lambda};$$

Найти минимум функции

: $I = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, из точки $x_0 = (-4, -4), h = 0{,}1$

Интерфейс программы имеет вид, представленный на рисунке 1

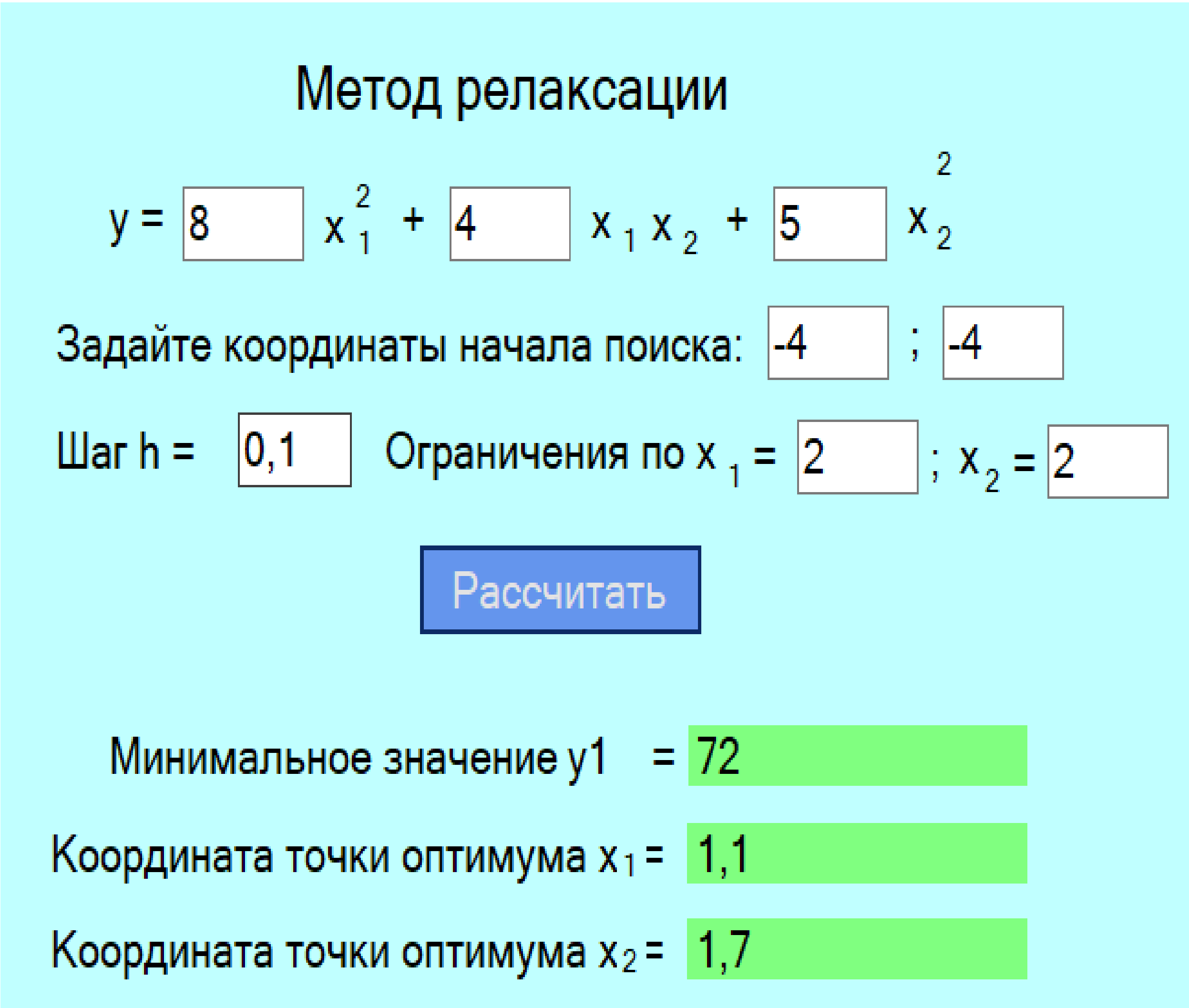

Рисунок 1 – Интерфейс программы

Схема алгоритма для контрольного примера дана на рисунке 2

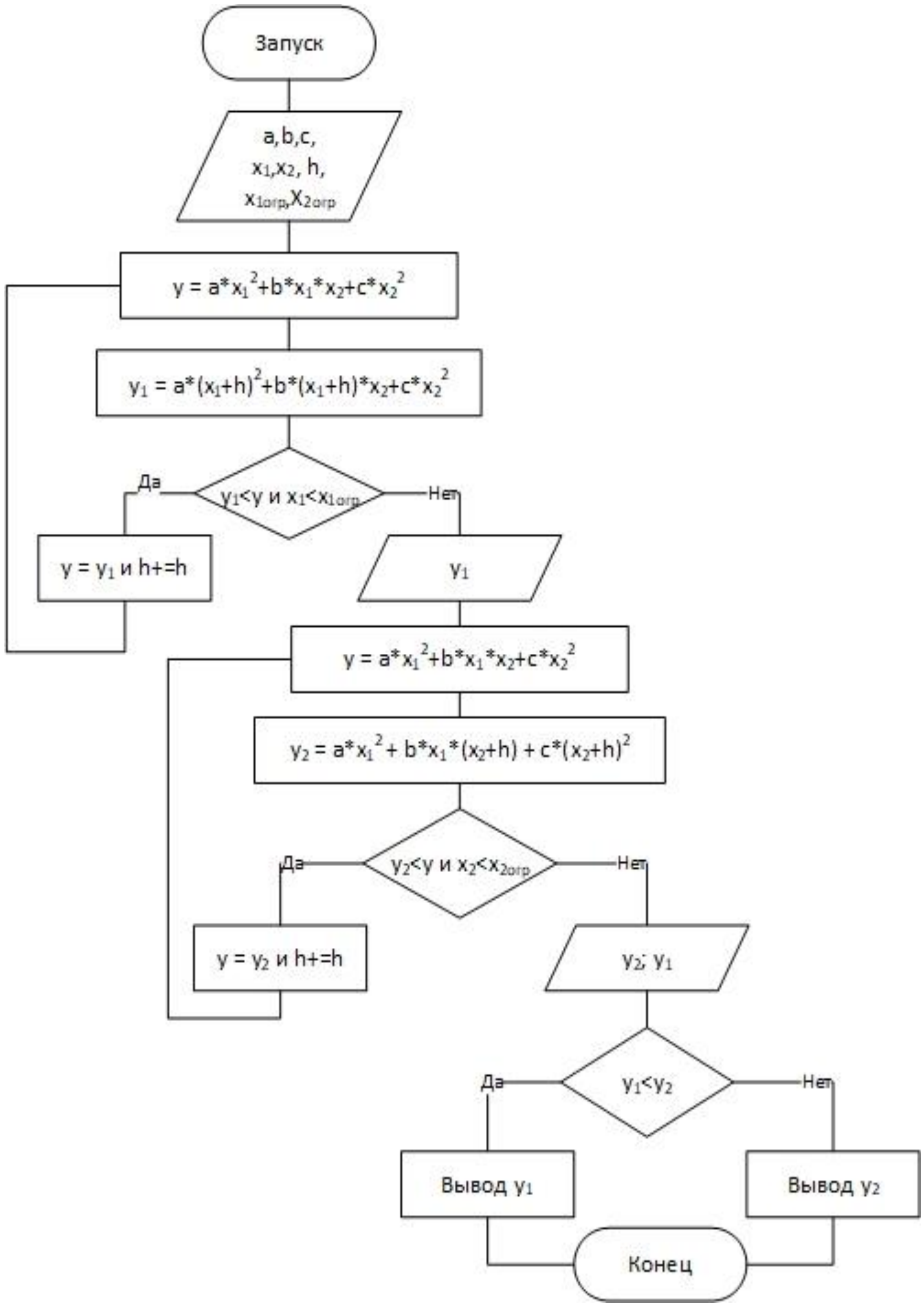

Рисунок 2 – Схема алгоритма

Использованные источники:

1. Н.С. Нестерова, Г.Д. Нестеров Методы оптимальных решений. Часть1. Методы оптимизации. - Краснодар, Академия ИМСИТ, 2012. – 89с.