УДК 004.8

Новиков Н.Б.
Аспирант Института психологии РАН
Россия, г. Москва
Novikov N.B.
Postgraduate Student, Institute of Psychology RAS
Russia, Moscow

ТЕОРИЯ ПРАВДОПОДОБНЫХ РАССУЖДЕНИЙ Д.ПОЙА И 18-Я ПРОБЛЕМА С.СМЕЙЛА. ЧАСТЬ 1

Аннотация: *Почему Р.Пенроуз в своей книге «Новый ум короля» (1989) уделил столь большое внимание анализу теоремы Геделя о неполноте и теоремы Тьюринга о неразрешимости проблемы остановки машины Тьюринга? Прав ли В.И.Арнольд, заявивший, что математика – экспериментальная наука? Как С.Смейл составил свой список математических проблем XXI столетия и включил в него восемнадцатую проблему, касающуюся пределов интеллекта (искусственного и естественного)? Можно ли обойти («обхитрить») теорему Геделя? В чем заключалась ошибка Марвина Минского, пытавшегося оценить перспективы искусственных нейронных сетей? Почему теория правдоподобных рассуждений Д.Пойа и идея Ю.Неемана о существенной роли феномена «серендипити» (элемента «везения») в научном исследовании имеют непосредственное отношение к решению 18-й проблемы С.Смейла? Все эти вопросы подробно обсуждаются в настоящей статье.*

Ключевые слова: *формальные системы, детерминированные алгоритмы, теорема Геделя о неполноте, теорема Тьюринга о неразрешимости проблемы остановки, правдоподобные рассуждения, индукция и аналогия, «невычислимость» творческого мышления, феномен «серендипити», пределы интеллекта (в интерпретации С.Смейла).*

Abstract: *Why did R. Penrose in his book "The Emperor's New Mind" (1989) pay so much attention to the analysis of Gödel's incompleteness theorem and Turing's theorem on the undecidability of the problem of stopping the Turing machine? Is V.I. Arnold right when he said that mathematics is an experimental science? How did S. Smale compose his list of mathematical problems of the 21st century and include the eighteenth problem concerning the limits of intelligence (artificial and natural) in this list? Is it possible to circumvent ("trick") Gödel's theorem? What was the mistake of Marvin Minsky when he tried to assess the prospects of artificial neural networks? Why is D. Polya's theory of plausible reasoning and Y. Neeman's idea of the essential role of the phenomenon of "serendipity" (the element of "luck") in scientific research directly related to the solution of the 18th problem of S. Smale? All of these issues are discussed in detail in this article.*

Key words: *formal systems, deterministic algorithms, Gödel's incompleteness theorem, Turing's theorem on the undecidability of the halting problem, plausible reasoning, induction and analogy, "incalculability" of creative thinking, serendipity phenomenon, limits of intelligence (in the interpretation of S. Smale).*

1. Роджер Пенроуз: от физики – к проблемам искусственного интеллекта

Британский ученый Роджер Пенроуз – известный физик, сумевший решить ряд сложных проблем, лежащих на стыке общей теории относительности, теории черных дыр и концепции эволюции наблюдаемой Вселенной. В частности, в 1970 г. Р.Пенроуз и С.Хокинг совместно разработали космологическую модель, описывающую ранние этапы эволюции Вселенной: авторы показали [1], что начальным состоянием расширяющейся Вселенной была сингулярная точка (предельная степень гравитационного сжатия вещества).

Когда удается решить сложную проблему в одной какой-либо области, возникает уверенность в том, что можно достичь успеха и за рамками своей исходной специализации. Во второй половине 1980-х гг. Р.Пенроуз задумался над проблемами человеческого мышления и его моделирования специалистами, называющими свою область теорией искусственного интеллекта (компьютерной наукой). При этом британский ученый смог не только быстро определить ключевые проблемы этой теории, но и предложить средства их решения. Одна из таких проблем касается понятия «алгоритма».

Отечественный математик В.А.Успенский в 1960 г. дал следующее (неполное) определение алгоритма: алгоритм – это точное предписание, которое задает вычислительный процесс, начинающийся с произвольных исходных данных и направленный на получение результата, полностью определяемого этими исходными данными. Под произвольными исходными данными здесь понимаются данные, выбранные из совокупности, фиксированной для данного алгоритма. При этом В.А.Успенский ссылается на А.А.Маркова, который дал упомянутое (неполное) определение алгоритма в 1940-х гг.

В.А.Успенский (вслед за А.А.Марковым) выделяет следующие основные черты алгоритмов: 1) определенность, 2) массовость, 3) результативность. Определенность алгоритмического предписания заключается в его точности и общепонятности, не оставляющей места для произвола. Массовость состоит в возможности для каждого алгоритма исходить из начальных данных, варьируемых в известных пределах. Что касается результативности, то она предполагает направленность алгоритма на получение искомого результата. Первая черта алгоритма, а именно определенность, обусловливает тот факт, что алгоритмический процесс является детерминированным: каждая стадия процесса однозначно определяет следующую стадию [2].

Р.Пенроуз задался вопросом: возможно ли описать алгоритмом (детерминированным вычислительным процессом) творческую деятельность человека, в ходе которой он создает нечто новое и общественно значимое: научные открытия, технические изобретения и т.д.? Ученый ответил на этот вопрос отрицательно. Далее он поставил вопрос: может ли искусственный интеллект, действующий в рамках программы, в которой нет ничего, кроме детерминированных алгоритмов, сравняться с человеком или превзойти его в своих мыслительных (познавательных) способностях? На этот вопрос он также ответил отрицательно. Р.Пенроуз нашел в математической логике (можно сказать, в математической теории алгоритмов) результаты, обосновывающие его ответы. Этими результатами явились теорема Геделя о неполноте и теорема Тьюринга о неразрешимости проблемы остановки.

Если говорить об обстоятельствах, при которых Р.Пенроуз покинул физику и занялся проблемами, относящимися к совсем другой области, то они были весьма интересны. А.К.Дьюдни в статье [3] пишет: «Несколько лет назад внимание Пенроуза привлекла телевизионная передача, в которой сторонники искусственного интеллекта позволили себе, с его точки зрения, неосторожное заявление. Они утверждали, что компьютеры, принципиально не очень отличающиеся от существующих, через какое-то время смогут проявить себя не менее разумными, чем люди, - а может быть, и превзойти их. Пенроуз был раздражен этим заявлением. Каким образом все тонкости человеческого интеллекта, в особенности, его творческие способности, могут возникнуть из алгоритма, «щелкающего» в электронном мозге компьютера? Эти невероятные утверждения заставили его заняться исследованиями, которые, в свою очередь, привели к появлению книги «Новый ум императора» [3, с.82].

Книга Р.Пенроуза [4], на которую ссылается А.К.Дьюдни, появилась в печати в 1989 г. Издание этой книги на русском языке впервые осуществлено 2003 г. Если обратиться к списку литературы, представленному в ней, то можно, по крайней мере, понять, как британский ученый осознал важность теоремы Геделя. Это произошло благодаря трем источникам, которые мы перечисляем ниже:

- Lucas J.R. Minds, machines and Gödel // Philosophy, 1961, vol.36, p.112-127;

- Nagel E., Newman J.R. Gödel’s proof. – New York: New York University Press, 1958;

- Hofstadter D.R. Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid. – Hassocks, Sussex: Harvester Press, 1979.

Первый источник – работа английского философа Джона Лукаса «Разум, машины и Гедель», в которой приводятся аргументы в пользу того, что в силу теоремы Геделя о неполноте человеческий разум нельзя свести к какому-либо, в том числе компьютерному, алгоритму. До публикации своей статьи в журнале «Philosophy» Джон Лукас озвучил ее в 1959 г. в форме доклада на заседании Оксфордского философского общества. Суть аргументов британского философа раскрывает Хавьер Фресан в книге [5]: «…Лукас удивительно простым языком объяснил, почему человеческий разум нельзя свести к компьютеру: так как мы способны обучить машину аксиомам и правилам вывода арифметики, мы можем составить все формулы языка и попросить машину определить, какие из них являются истинными. Рано или поздно компьютер дойдет до высказывания «эта фраза недоказуема» и проведет остаток вечности в попытках доказать или опровергнуть ее, в то время как мы, люди, немедленно поймем, что эта фраза является неразрешимой. «Следовательно, машина по-прежнему не будет адекватной моделью разума <…> который будет всегда находиться на шаг впереди любой закостенелой, омертвевшей формальной системы», - заключал Лукас» [5, с.134].

Второй источник – книга Эрнеста Нагеля и Джеймса Ньюмена «Теорема Геделя». В этой книге, впервые переведенной на русский язык в 1970 году, авторы отмечают, что работа Геделя показала полную несостоятельность прежде весьма распространенного убеждения в том, что для любой математической дисциплины можно указать перечень аксиом, достаточный для систематического построения всего множества истинных предложений данной науки.

Далее мы процитируем Нагеля и Ньюмена, используя второе издание их книги на русском языке [6]. Мысль, весьма похожая на аргумент Лукаса, высказывается Нагелем и Ньюменом в финале их монографии: «Заключения, к которым пришел Гедель, порождают, естественно, и вопрос, можно ли построить вычислительную машину, сравнимую по своим «творческим» математическим возможностям с человеческим мозгом. Современные вычислительные машины обладают некоторым точно фиксированным запасом команд, которые умеют выполнять их элементы и блоки; команды соответствуют фиксированным правилам вывода некоторой формализованной аксиоматической процедуры. Таким образом, машина решает задачу, шаг за шагом выполняя одну из «встроенных» в нее заранее команд. Однако, как видно из геделевской теоремы о неполноте, уже в элементарной арифметике натуральных чисел возникает бесчисленное множество проблем, выходящих за пределы возможностей любой конкретной аксиоматической системы, а значит, и недоступных для таких машин, сколь бы остроумными и сложными ни были их конструкции и с какой бы громадной скоростью ни проделывали они свои операции. Для каждой конкретной задачи в принципе можно построить машину, которой эта задача была бы под силу, но нельзя создать машину, пригодную для решения любой задачи. Правда, и возможности человеческого мозга могут оказаться ограниченными, так что и человек тогда сможет решить не любую задачу» [6, с.111-112].

Наконец, третий источник, оказавший влияние на взгляды Р.Пенроуза, - чудесная, увлекательная книга Дугласа Хофштадтера «Гедель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда» [7]. Дуглас Хофштадтер (Douglas Hofstadter) – сын лауреата Нобелевской премии по физике за 1961 г. Роберта Хофштадтера (1915-1990). Последний получил Нобелевскую премию «за основополагающие исследования по рассеянию электронов на атомных ядрах». Результаты этих исследований подробно описаны в [8].

Д.Хофштадтер в [7], прежде всего, обратил внимание на «взрывной характер» теоремы Геделя о неполноте. На то, что она изменила наши прежние представления о возможностях формальных (аксиоматико-дедуктивных) систем. Результат Геделя буквальным образом опроверг казавшееся истинным утверждение немецкого математика Давида Гильберта (1862-1943) о том, что можно доказать непротиворечивость математики финитными средствами самой математики. К.Гедель показал неосуществимость гильбертовской программы формализации математики, преследовавшей цель создать такую аксиоматикодедуктивную систему, которая, во-первых, позволяла бы открывать новые математические истины без обращения к опыту (эксперименту), а во-вторых, таким же способом доказывать их.

Примечательно, что на первых этапах своих исследований К.Гедель был сторонником программы Д.Гильберта и верил в ее реализуемость. То есть он позитивно относился к попыткам своих коллег (логиков) доказать непротиворечивость классических формальных систем, начиная с арифметики. Однако вскоре в его распоряжении появились аргументы, говорящие об ошибочности такого подхода: ему стали известны примеры истинных высказываний, которые нельзя доказать, исходя из заранее принятых аксиом. В 1931 г. он опубликовал статью «О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем», в которой и изложил (с доказательством) свою теорему, показавшую все ограничения, присущие аксиоматическому методу.

К.Гедель продемонстрировал, что никакая рекурсивно перечислимая и непротиворечивая система аксиом арифметики не может быть полной; всегда будут существовать какие-либо истинные свойства чисел, которые нельзя будет доказать, исходя из аксиом арифметики. Стало ясно, что высказывание «арифметика является непротиворечивой» являет собой пример неразрешимого высказывания. Результат К.Геделя одновременно давал отрицательное решение 2-й проблемы Д.Гильберта, входящей в список из 23-х проблем, сформулированных им в начале XX века.

Одним из тех, кто работал над программой формализации, предложенной Д.Гильбертом, был Джон фон Нейман (1903-1957), известный венгеро-американский математик, сотрудник Гильберта. Узнав о статье К.Геделя и ознакомившись со схемой доказательства его теоремы, он быстро понял ее суть и следствия, вытекающие из нее, после чего прекратил свою работу в рамках гильбертовской программы.

Теперь понятно, почему Р.Пенроуз избрал теорему Геделя о неполноте в качестве инструмента обоснования того, что творческое мышление человека нельзя описать как реализацию детерминированных алгоритмов, а деятельность машин, основу программ которых составляют те же алгоритмы, - как «разумную» деятельность. Кроме результата Геделя, он использовал также теорему Тьюринга о неразрешимости проблемы остановки универсальной машины Тьюринга.

Машина Тьюринга – это абстрактное устройство, теоретически описанное в 1936 г. выдающимся английским математиком Аланом Тьюрингом (1912-1954). Принцип действия данной машины рассматривается во многих работах, в том числе в [9]. Как правило, машина Тьюринга работает в течение какого-то времени, затем, завершая решение задачи, останавливается и считывает окончательный результат с ленты. Этот результат представляет собой ответ на вопрос, содержавшийся в предложенной ей задаче. Остановка машины Тьюринга означает получение ответа, если же машина не может остановиться и продолжает работать, значит, ответ еще не готов (задача не решена).

Разработав модель подобной машины, А.Тьюринг поставил вопрос: существуют ли такие задачи, при решении которых машина никогда не остановится (поскольку не будет иметь средств для их решения)? Другими словами, можно ли определить, останавливается ли некоторая программа при любых исходных данных или в некоторых случаях программа «зацикливается» (работает бесконечно долго)? А.Тьюринг доказал отсутствие алгоритма, который мог бы решить задачу остановки машины для любой программы. Тем самым А.Тьюринг дал отрицательное решение еще одной проблемы Д.Гильберта – так называемой «проблемы разрешения», которую он поставил перед своими коллегами в 1928 г.

Опираясь на результаты Геделя и Тьюринга, Р.Пенроуз приступил к обоснованию того, что процесс поиска математических истин нельзя формализовать, то есть представить в виде строгого (детерминированного) алгоритма, в котором правильный ответ однозначно предопределен исходными данными. Р.Пенроузу удалось осуществить эффектный «трюк» - установить эквивалентность формальных систем и алгоритмов. Приняв, что в качестве алгоритма могут выступать все действия машины Тьюринга, ученый после серии шагов продемонстрировал, что для случая достаточно богатой формальной системы Ф мы имеем простое соотношение: алгоритм Т → правила формальной системы Ф. Детальное изложение схемы рассуждений, использованных Р.Пенроузом в данном случае, читатель найдет в книге Ю.Л.Ершова и В.В.Целищева [10, с.27-29].

Установление эквивалентности формальной системы и машины Тьюринга явилось весьма важным фактом для аргументации, согласно которой математическое творчество не является механическим процессом. Кроме того, Р.Пенроуз обнаружил, что если человеческое мышление нельзя представить в виде детерминированного алгоритма, основанного на рекурсивных функциях (совпадение частично рекурсивных функций с вычислимыми функциями отметил еще Гедель), то оно, это мышление, невычислимо.

Нужно было хотя бы схематично определить, какие компоненты человеческого мышления обладают спецификой, делающей его невычислимым. Для этого Р.Пенроуз обращается к творчеству великого французского математика Анри Пуанкаре (1854-1912). Он находит в научной карьере А.Пуанкаре примеры ситуаций, когда тот приходил к выдающимся математическим открытиям внезапно, совершенно неожиданно, в форме такого «озарения», которое, по мнению Р.Пенроуза, не управлялось какими-либо правилами (ясными методами) и не диктовалось анализом результатов эмпирического опыта.

Напомним, что некоторые специалисты вкладывают в понятие «математического опыта» смысл, отличающийся от того, который используется, например, в физике. Они (эти специалисты) считают, что если в физике новые идеи возникают на базе анализа результатов наблюдений и экспериментов, то в математике дело обстоит иначе: обычно математик работает, преобразуя одни наборы символов некоторого конечного алфавита в другие, и на одном из этапов такой «игры» с символами ему открывается новая математическая истина. По мнению сторонников такого взгляда, эксперимент и наблюдение играют в математике второстепенную (вторичную) роль.

Отметим, что Р.Пенроуз разделял эту точку зрения, которая на самом деле ведет к тезису о полной независимости математики от физики, к отрицанию того, что многие математические открытия (например, дифференциальное исчисление) были продиктованы потребностями физической науки. Оставляя в стороне практику и эксперимент как средства проверки наших гипотез, Р.Пенроуз в своей книге [4] пишет: «Лично мне представляется, что всякий раз, когда ум постигает математическую идею, он вступает в контакт с миром математических понятий Платона. (Вспомним, что, по Платону, математические идеи имеют собственное бытие и населяют некий идеальный мир, доступ в который осуществляется только благодаря работе интеллекта). Когда человек «видит» математическую истину, его сознание пробивается в этот мир идей и устанавливает с ним кратковременный прямой контакт (т.е. осуществляет «доступ посредством интеллекта»)» [4, с.346].

Итак, Р.Пенроуз обнаружил невычислимость человеческого мышления и показал, что машины, управляемые программами, основанными на детерминированных алгоритмах (на точно вычисляемых рекурсивных функциях), не воспроизводят это мышление. Выделить конкретные компоненты мышления, обусловливающие его невычислимость, ученому не удалось отчасти в силу того, что он верил в «мир идей Платона», философа, который, как известно, считал, что открытие – одна из форм воспоминания, а не описание результатов наблюдения и эксперимента.

2. Владимир Арнольд: «Математика – экспериментальная наука»

13 марта 2001 г. в Институте А.Пуанкаре (Франция) состоялась математическая дуэль между двумя крупными математиками. Одним из них был российский математик, ученик А.Н.Колмогорова, Владимир Игоревич Арнольд. Выше мы говорили, что К.Гедель предложил решение 2-й проблемы

Д.Гильберта, входящей в список 23-х его проблем, сформулированных в начале XX века. Что касается В.И.Арнольда, то он совместно с А.Н.Колмогоровым нашел решение 13-й проблемы Д.Гильберта, которая звучит так: можно ли решить общее уравнение седьмой степени с помощью функций, зависящих только от двух переменных? Сам Д.Гильберт считал, что получить такое решение нельзя, однако В.И.Арнольд установил обратное и показал, что любая непрерывная функция представляется в виде суперпозиции непрерывных функций одного и двух аргументов. Другое крупное достижение В.И.Арнольда – вклад в теорию вполне интегрируемых гамильтоновых (динамических) систем.

Вторым участником дуэли (дискуссии) был французский математик Жан-Пьер Серр, лауреат премии Филдса за 1958 год, сделавший ряд открытий в области алгебраической геометрии, топологии и теории чисел. В ходе дискуссии Ж.-П.Серр пытался доказать утверждение о полной независимости математики от физики. Он говорил, что у математики и физики нет ничего общего.

В противовес своему оппоненту В.И.Арнольд отстаивал мысль, что математическая наука – при всей своей кажущейся абстрактности – имеет своим источником физические проблемы, для решения которых и разрабатывались различные «формализмы» (вычислительные схемы). Российский математик приводил аргументы, согласно которым математическое творчество нельзя свести к формальным преобразованиям одних наборов символов некоторого конечного алфавита в другие. Он назвал ошибочным подход Р.Декарта, которой утверждал, что не следует экспериментально проверять исходные положения математических теорий, поскольку эти положения (аксиомы) не имеют отношения к реальности. Сравнивая математику и физику, В.И.Арнольд подчеркнул, что математика – это часть физики. Изложению своей позиции, выраженной во время дискуссии, В.И.Арнольд посвятил статью [11], где отметил: «И математика, и физика – экспериментальные науки, разница лишь в том, что в физике эксперименты стоят миллиарды долларов, а в математике единицы рублей» [11, с.250].

Завершая дискуссию и оставшись при своем мнении, Ж.-П.Серр сказал: «Теперь мы еще раз убедились, какая это замечательная наука – математика. Люди со столь противоположными мнениями, как мы двое, могут в ней сотрудничать, уважать друг друга, знать и использовать результаты друг друга, сохраняя при этом свои противоположные мнения».

Можно предположить, что у В.И.Арнольда были веские основания сожалеть о том, что его оппонент не изменил свою точку зрения. Можно также догадываться, что время дискуссии было столь ограниченным, что не позволяло ему (Арнольду) изложить всю совокупность имевшихся у него доводов. Причем, их не нужно было искать, они в огромном количестве представлены в материалах, описывающих историю математики. В.И.Арнольд не просто был знаком с этими материалами; он сам, считая необходимым распространять историко-математические знания, написал ряд интересных статей и книг на эту тему.

Вот некоторые из фактов, свидетельствующих об эмпирическом происхождении идей и концепций (в том числе целых разделов) математики.

Геометрия древних египтян появилась на свет в качестве средства измерения площадей: задача подобного измерения возникала всякий раз после разливов Нила, нарушавших границы полей, возделанных человеком.

Теория тригонометрических функций имеет своим источником работы древних астрономов, которым важно было определять соотношения между углами и сторонами треугольника и других геометрических фигур. Например, Аристарх Самосский (III век до н.э.) использовал тригонометрические соотношения в трактате «О величинах и расстояниях Солнца и Луны».

Математическая теория вероятностей обязана своим рождением решению задач, связанных с определением вероятности успеха или неудачи в азартных играх, а также прикладных задач демографической статистики и страхового дела (Кардано, Паскаль, Ферма, Гюйгенс и др.).

Дифференциальное и интегральное исчисление в его наиболее ранней форме исчисления флюксий (И.Ньютон) возникло как наиболее общий метод решения задач небесной механики и, прежде всего, задачи описания орбитального движения планет под влиянием сил тяготения.

Математическая теория графов имеет своим источником исследования Леонардо Эйлера (1707-1783), посвященные решению проблемы семи кенигсбергских мостов: найти маршрут прохождения семи мостов так, чтобы не проходить ни один из них дважды.

Об экспериментальном (эмпирическом) генезисе математических идей свидетельствовал и личный опыт А.Н.Колмогорова, который время от времени рассказывал В.И.Арнольду и другим ученикам, как он приходил к своим математическим и физико-математическим результатам. Один из таких рассказов касается разработки математической теории турбулентности, в которой А.Н.Колмогоров (1941) сформулировал свои знаменитые гидродинамические гипотезы подобия.

В.И.Арнольд в статье [12] пишет о своем учителе: «Не ищите, - говорил он мне, - математического смысла в моих гидродинамических достижениях. Его там нет. Я ничего не вывожу из исходных аксиом или определений (как говорят физики, «из первых принципов»): мои результаты не доказаны, а верны, и это гораздо важнее!» Из рассказов очевидцев я знаю, что колмогоровские законы подобия в теории турбулентностей были им получены не из соображений размерности (которыми их сейчас объясняют), а путем выстилания всех полов на даче в Комаровке бумажными простынями с тысячами экспериментальных данных (полученных, как он мне рассказывал, но не написал, в основном, от Прандтля)» [12, с.29].

Об этом же сообщает другой ученик А.Н.Колмогорова – Яков Григорьевич Синай в заметке [13]: «Во время прогулки я стал расспрашивать А.Н. об истории его работ по турбулентности, выполненных перед самой войной. Эти работы пользуются необычайной известностью. Такие понятия, как, например, «колмогоровский спектр», известны сейчас каждому физику. Тем более удивительно, что эти работы были выполнены математиком, значительную часть времени посвятившим себя достаточно отвлеченным разделам этой науки. Ответ

Колмогорова меня поразил. Он сказал, что свои законы подобия он вывел, полгода анализируя результаты экспериментов. Тогда его квартира была завалена рулонами бумаги, и он буквально ползал по полу, исследуя их» [13, с.207].

Еще один пример экспериментального подхода к исследованию математических проблем – работа А.Н.Колмогорова (1954), связанная с попыткой определить число предельных циклов квадратичных векторных полей на плоскости. Для этого нужно было осуществить непростой поиск – перебрать несколько сотен полей на плоскости со случайно выбранными коэффициентами многочленов второй степени. Другими словами, требовалось провести большую «экспериментальную» работу, исследовать значительное количество вариантов. В распоряжении А.Н.Колмогорова не было компьютера, поэтому он нашел интересный выход из ситуации. Как пишет В.И.Арнольд в [14], используя возможности математического практикума для второкурсников мехмата, А.Н.Колмогоров раздал каждому из нескольких сотен студентов систему дифференциальных уравнений определенного вида. Требовалось нарисовать фазовый портрет (и, в частности, найти число предельных циклов). Колмогоров рассчитывал найти таким эмпирическим поиском пример со многими циклами. Но оказалось, странным образом, что ни в одной из этих случайно выбранных систем ни одного цикла нет. Позже китайские математики нашли примеры с тремя и четырьмя циклами, хотя в общем случае задача до сих пор не решена.

Таким образом, В.И.Арнольд не просто утверждал, что «математика – экспериментальная наука», но и приводил множество историко-научных фактов, говорящих о том, что процесс математического открытия не является проникновением в заоблачный «мир идей Платона», как думал Р.Пенроуз. Как всякая серьезная наука, математика обязана своими крупными достижениями проникновением в результаты эксперимента, под которым следует понимать ее многообразный «числовой и геометрический опыт». Предельные циклы, которые исследовал А.Н.Колмогоров, чтобы сформулировать общие теоремы об этих циклах, - пример такого «геометрико-числового опыта».

Теперь следует рассказать о важном событии, произошедшем за несколько лет до того, как В.И.Арнольд принял участие в математической дуэли, во время которой он пытался убедить своего оппонента Ж.-П.Серра в наличии глубоких связей между математикой и физикой.

В 1995 г. В.И.Арнольд был избран на должность вице-президента Международного математического союза. Вскоре, наблюдая, как подходит к концу двадцатое столетие с его многочисленными баталиями как научного, так и политического плана, он принял решение разослать крупным математикам письмо с предложением охарактеризовать важные проблемы, которые необходимо будет решать уже в следующем (двадцать первом) веке. Проблемы, которые бросят вызов интеллекту молодых математиков и окажут такое же влияние на развитие математической науки, какое в свое время оказали знаменитые проблемы Д.Гильберта.

3. Стивен Смейл и его ответ на письмо В.И.Арнольда. Формулировка 18-й проблемы С.Смейла

Одним из тех, кто получил письмо В.И.Арнольда, был американский математик Стивен Смейл (Stephen Smale). В 1966 г. он был удостоен премии Филдса за доказательство гипотезы Пуанкаре о том, что всякое n-мерное многообразие гомотопически эквивалентно n-мерной сфере тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно ей. Это обобщенная гипотеза Пуанкаре; С.Смейл доказал ее для $n \geq 5$. Как известно, для случая $n = 4$ гипотеза была доказана американским математиком Майклом Хартли Фридманом в 1982 г. Наконец, спустя 20 лет трехмерный случай гипотезы Пуанкаре был доказан российским математиком Григорием Перельманом, использовавшим в своей работе необычный инструмент – «потоки Риччи-Гамильтона».

С.Смейл также занимался теорией динамических систем, и в этой области он сделал удивительную находку: открыл так называемую «подкову Смейла» - пример динамической системы, имеющей бесконечное число периодических точек (и хаотическую динамику), причем это свойство не разрушается при малых возмущениях системы.

С.Смейл находился в тесном общении с российскими математиками еще до того, как получил медаль Филдса. Например, в 1961 г. он посетил Международный симпозиум по нелинейным колебаниям, который проходил в Киеве. После симпозиума он поехал в Москву, где рассказал молодым математикам С.П.Новикову, В.И.Арнольду, Я.Г.Синаю и Д.В.Аносову об открытии своей «подковы». Он также признался им, что это открытие опровергает его прежнюю гипотезу о плотности систем Морса-Смейла (разновидности динамических систем).

Итак, получив письмо В.И.Арнольда, в котором содержалась просьба определить наиболее важные не решенные до сих пор математические проблемы, работа над которыми будет стимулировать развитие математики уже в третьем тысячелетии, С.Смейл задумался. Он понимал, что ему нужно сделать нечто аналогичное тому, что когда-то сделал великий Д.Гильберт: составить список математических проблем, разгадка которых устранит множество «белых пятен» (пробелов) в наших знаниях о природе.

Первую строку в его списке заняла гипотеза Римана о нулях дзета-функции (о том, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана, число которых бесконечно, лежат на критической прямой, состоящей из комплексных чисел с вещественной частью 1/2). Немецкий математик Б.Риман сформулировал эту гипотезу в 1859 г., и до сих пор она не доказана.

Пополняя свой список нерешенных проблем, С.Смейл также включил в него вопрос о равенстве классов сложности P и NP. Этот вопрос – центральная проблема теории алгоритмов и в русскоязычных источниках называется «проблемой перебора». Отношения между классами P и NP рассматриваются в разделе теории алгоритмов, который называется теорией вычислительной сложности. Впервые вопрос о равенстве классов сложности P и NP поставил американский ученый Стивен Кук в 1971 г. и независимо от него ученик

А.Н.Колмогорова, отечественный математик Леонид Анатольевич Левин в 1973 г.

Отметим, что когда Р.Пенроуз заявил о невычислимости человеческого мышления, он тем самым сформулировал тезис, «пересекающийся» с тем, что изучает теория вычислительной сложности.

Наконец, завершая свою работу над списком математических проблем, которая содержала уже семнадцать задач, С.Смейл вспомнил о книге Р.Пенроуза [4]. Он вспомнил о тех аргументах, которые использовал Р.Пенроуз для обоснования своей мысли о том, что строгие (детерминированные) алгоритмы не описывают творческое мышление человека. Его внимание также привлекли рассуждения Р.Пенроуза, согласно которым машины, чьи программы основаны на этих строгих алгоритмах, не могут воспроизвести интеллектуальные способности людей.

С.Смейлу стало ясно, что теорема Геделя о неполноте и теорема Тьюринга о неразрешимости проблемы остановки действительно накладывают определенные ограничения на попытки формализовать творческую деятельность человека. И, помимо этого, показывают, что одних детерминированных алгоритмов (формальных систем) недостаточно для того, чтобы искусственный интеллект приблизился по своим возможностям к интеллекту естественному.

С.Смейл пришел к выводу, что эти математические результаты можно назвать «пределами» интеллекта. После этого он взглянул на проблему более широко, то есть обобщил ее. Не исключая того, что, помимо теоремы Геделя о неполноте и теоремы Тьюринга о неразрешимости проблемы остановки, могут быть и другие факторы, ограничивающие формализацию разума, он поставил вопрос: «Каковы пределы интеллекта: как искусственного, так и человека?». Этот вопрос и занял последнюю – восемнадцатую - строку в списке проблем С.Смейла, работу над которым он начал по просьбе В.И.Арнольда.

В 1997 г. по случаю 60-летия В.И.Арнольда Стивен Смейл выступил в Филдсовском институте (Торонто) с лекцией «Математические проблемы следующего столетия» [15]. Эта лекция как раз и была посвящена составленному им списку проблем. Характеризуя последнюю из них, восемнадцатую проблему, С.Смейл пояснил ее суть: «Пенроуз пытается привести некоторые ограничения для искусственного интеллекта. Фигурирующий в его доказательстве интересный вопрос – это неразрешимость множества Мандельброта и выводы из теоремы Геделя о неполноте. Однако необходимо более широкое изучение, которое включало бы более глубокие модели разума, а также компьютера, и проясняющее, что общего между искусственным и человеческим интеллектом, и чем они отличаются. Я бы начал исследования в том направлении, где вместе с теорией действительных чисел, приближениями, теорией вероятностей и геометрией значительную роль играют обучение, решение задач и теория игр» [15, с.297].

Ссылка С.Смейла на множество Мандельброта связана с тем, что Р.Пенроуз рассматривал это множество в своей книге [4] в качестве одного из объектов, обладающих фантастической сложностью. В частности, он писал: «…Сложную структуру множества Мандельброта во всех ее деталях не под силу охватить никому из нас, и ее невозможно полностью отобразить на компьютере» [4, с.87]. Возможно, Р.Пенроуз считал, что сложность множества Мандельброта – некая аналогия, пусть и не совсем точная, сложности человеческого сознания.

Сам Б.Мандельброт [16], анализируя такие примеры фрактальных объектов, как длина береговой линии Британии и траектории частиц, участвующих в броуновском движении, говорит о том, что модели этих фракталов нельзя описать с помощью компьютеров, основанных на детерминированных алгоритмах. Б.Мандельброт считает, что для моделирования таких фракталов в алгоритмы компьютеров нужно вводить случайность.

Невозможность описания фрактальных объектов с помощью компьютеров, в чье программное обеспечение «встроены» исключительно детерминированные алгоритмы, скорее всего, напомнила Р.Пенроузу невозможность моделирования человеческого сознания на основе тех же детерминированных (исключающих случайность) алгоритмов. Мы еще вернемся к случайности, которую мы будем обсуждать в другом контексте. Отметим лишь, что когда в 1960-х гг.

А.Н.Колмогоров строил математическую теорию сложности, позже названную «колмогоровской теорией сложности» (другое название – алгоритмическая теория информация), он столкнулся с весьма интересным фактом. Оказалось, что длина описания закономерных (регулярных) последовательностей символов короче длины описания случайных последовательностей. Другими словами, сложность случайных последовательностей превосходит сложность последовательностей, управляемых той или иной закономерностью. О том, как возникли первые понятия «колмогоровской теории сложности», читатель может узнать, ознакомившись с работой А.Н.Колмогорова [17].

4. Виктор Глушков: как «обхитрить» теорему Геделя о неполноте

Виктор Михайлович Глушков (1923-1982) – советский математик, кибернетик, академик АН СССР, лауреат Ленинской премии и двух Государственных премий СССР. Он автор многочисленных трудов по алгебре, кибернетике и вычислительной технике. В 1966 г. – в том самом году, когда С.Смейл получал свою медаль Филдса, - под руководством В.М.Глушкова была разработана первая в Советском Союзе персональная ЭВМ «Мир-1» (машина для инженерных расчетов).

Кроме того, В.М.Глушков был инициатором и главным идеологом разработки и создания «Общегосударственной автоматизированной системы учета и обработки информации» (ОГАС), предназначенной для автоматизированного управления всей экономикой страны в целом. Для этого им была разработана система алгоритмических алгебр и теория для управления распределенными базами данных. Система «ОГАС» представляла собой не что иное, как мощную компьютерную сеть, подобную нынешнему Интернету, но обладающую гораздо большим числом функций. Такая сеть могла бы не только обрабатывать, контролировать и корректировать управленческие решения, но изменить сам механизм управления экономикой. К сожалению, этот проект не был реализован, так как не получил государственного финансирования. Ряд ключевых идей, касающихся проекта «ОГАС», В.М.Глушков изложил в книге [18].

В 1955 г. В.М.Глушков защитил докторскую диссертацию, посвященную решению обобщенной пятой проблемы Д.Гильберта (эта проблема сводится к вопросу: все ли непрерывные группы являются группами Ли?). Интересный рассказ о том, как В.М.Глушков решил эту сложную математическую проблему, содержится в [19].

Размышляя о природе формальных (аксиоматико-дедуктивных) систем и о том, почему они сталкиваются с трудностями, предписываемыми теоремой Геделя о неполноте, В.М.Глушков (1979) пришел к тому же заключению, что и В.И.Арнольд. Он понял, что «ахиллесова пята» всех формальных систем – игнорирование опыта, эксперимента, практики. Формальные системы обладают признаком, который в ряде случаев дает преимущество, но в большинстве ситуаций превращается в существенный дефект – замкнутость и, можно даже сказать, изолированность от внешнего мира. От того мира, для познания (исследования) которого эти формальные системы были однажды созданы. Разумеется, аксиоматико-дедуктивный способ аргументации явился важным изобретением древних греков: он позволил ввести в геометрию и другие разделы математики строгие доказательства, не оставляющие места для каких-либо сомнений. Но та же дедукция сыграла с греками злую шутку.

А.Азимов в книге [20] пишет: «Евклид сумел свести аксиомы к нескольким простым определениям. Из этих аксиом он создал сложную и величественную систему, получившую название евклидова геометрия. Никогда не было создано так много практически из ничего, и наградой Евклиду стало то, что его учебник используют с незначительными изменениями более 2000 лет. Греки были влюблены в заманчивую игру под названием «дедукция» и, увлекшись, совершили две серьезные ошибки. Они сочли дедукцию наиболее приемлемым средством достижения знаний, хотя и были достаточно осведомлены, что в некоторых случаях ее будет недостаточно; например, расстояние от Афин до

Коринфа нельзя определить с помощью абстрактных принципов, это расстояние следовало измерить» [20, с.13].

Если с помощью одной лишь дедукции, без выполнения определенных экспериментальных (практических) действий нельзя определить расстояние от Афин до Коринфа, то что уж говорить об открытии множества других истин? Наверняка, В.М.Глушков не был первым, кто догадался, как можно «обхитрить» теорему Геделя о неполноте, но он одним из первых ясно изложил способ достижения этой цели: нужно всего лишь взаимодействовать с внешним миром, считать критерием истины практику и эксперимент, а не аксиоматико-дедуктивные формализмы. Свои идеи на этот счет он представил в статье «Развитие абстрактного мышления и запрет Геделя», которая впервые была опубликована в 1979 г., а впоследствии включена в его книгу [21].

В этой книге В.М.Глушков, в частности, отмечает: «…Налагаемый теоремой Геделя запрет снимается, когда формальные системы абстрактного мышления рассматриваются не изолированно, а в процессе непрерывного развития во взаимодействии с окружающим миром» [21, с.134].

Сказанное можно интерпретировать следующим образом: если мы хотим создать машины, способные познавать окружающий мир так же, как это делает человек, мы должны наделить эти машины телом и двигательной активностью (как машина, не способная передвигаться, сможет преодолеть «расстояние от Афин до Коринфа» и измерить это расстояние?). Помимо этого, машины должны приобрести все органы чувств, которые позволяют человеку видеть, слышать, осязать и т.д.

Наличие двигательной активности, эффективно работающих органов чувств и определенного уровня интеллекта – это тот базис, на котором можно основываться, переходя к следующему этапу построения «разумных» машин. Речь идет о том, чтобы обеспечить машины способностью обучаться, накапливать опыт, отыскивать закономерности в исходных данных, полноценно взаимодействовать с окружающим миром. Решение этих задач относится к области, называемой «машинным обучением» (machine learning), которая преследует цель создать системы, превосходящие те, что критиковал Р.Пенроуз, отмечая их неспособность выходить за рамки строгих формализованных программ, построенных на детерминированных алгоритмах. Вычислительные машины, способные к обучению и, следовательно, к постоянному извлечению самых разнообразных знаний из внешнего мира, - это те системы, на которые уже не распространялись бы запреты, связанные с теоремой Геделя о неполноте и утверждением Тьюринга о неразрешимости проблемы остановки.

5. Марвин Минский: ошибка, замедлившая прогресс ИНС

Примером современных систем, способных к обучению, являются так называемые искусственные нейронные сети (ИНС), имитирующие деятельность нашего мозга, состоящего из миллиардов нейронов, взаимодействующих друг с другом с помощью синапсов (точек контакта между отростками нейронов). Конечно, искусственные нейронные сети (ИНС) не являются детальной копией нашего мозга, они не воспроизводят с исчерпывающей полнотой механизмы активности биологических нейронов, на что обращали внимание многие специалисты. Ряд недостатков искусственных нейронных сетей обсуждает А.Л.Шамис в [22].

Тем не менее, искусственные нейронные сети представляют собой альтернативу программируемым цифровым компьютерам. Находя применение в таких областях, как распознавание образов, анализ больших массивов информации, прогнозирование и т.д., они (ИНС) обладают важным свойством – способностью обучаться на основе данных при участии учителя или без его вмешательства.

В 1957 г. американский ученый Фрэнк Розенблатт (1928-1971) разработал математическую или, лучше сказать, компьютерную модель того, как мозг воспринимает зрительную информацию. Исходная задача состояла в том, чтобы объяснить, как сеть из нейроноподобных элементов может обучаться и распознавать подаваемые на ее вход изображения. В 1960 г. Ф.Розенблатт реализовал предложенную теоретическую модель в виде электронной машины «Марк-1». Перцептрон стал одной из первых моделей искусственных нейронных сетей, а «Марк-1» - первым в мире нейрокомпьютером. Изобретение Ф.Розенблатта дало значительный толчок развитию многочисленных теорий построения распознающих обучающихся автоматов, строящихся как сети из искусственных (формальных) нейронов. Современные искусственные нейронные сети можно считать развитием перцептрона Ф.Розенблата.

В 1960-е гг. казалось, что нейронные сети позволяют решить практически любую задачу. Однако в 1969 г. один из основателей теории искусственного интеллекта Марвин Минский (1927-2016) совместно с С.Пейпертом опубликовал книгу «Перцептроны», в которой математически строго обосновал фундаментальные ограничения однослойного перцептрона. К сожалению, отталкиваясь от этого обоснования, М.Минский сделал ошибочный вывод. Он решил, что недостатки однослойного перцептрона будут характерны и для его многослойных версий. В результате в 1970-х гг. произошло ослабление интереса к нейронным сетям. Многие исследователи покинули это поле деятельности на многие годы. В области ИНС возник застой, который длился не один десяток лет.

П.Домингос в книге [23] пишет о последствиях ошибки М.Минского: «Книга Perceptrons была пронзительно ясной, безупречной с точки зрения математики и оказала катастрофическое воздействие на машинное обучение, которое в те годы ассоциировалось в основном с нейронными сетями. Большинство исследователей (не говоря уже о спонсорах) пришли к выводу, что единственный способ построить интеллектуальную систему – это явно ее запрограммировать, поэтому в науке на 15 лет воцарилась инженерия знаний, а машинное обучение, казалось, было обречено остаться на свалке истории» [23, с.124-125].

Ситуация стала меняться после того, как Джеффри Хинтон с соавторами (1986) разработал метод обратного распространения ошибки – итеративный градиентный алгоритм, который используется с целью минимизации ошибки работы многослойного перцептрона и получения желаемого выхода. Этот алгоритм стал самым популярным для обучения многослойных нейронных сетей. Джефф Хинтон – праправнук английского математика и логика Джорджа Буля (1815-1864), который обнаружил аналогию между символическими методами алгебры и символическим методом представления логических умозаключений (силлогизмов). Эту аналогию он изложил в сочинениях «Математический анализ логики» (1847) и «Исследование законов мышления» (1854).

Настоящий прорыв произошел в 2005-2006 гг., когда группа исследователей под руководством Джеффри Хинтона в университете Торонто и Йошуа Бенджи (Джошуа Бенджо) в университете Монреаля научились обучать так называемые глубокие нейронные сети, состоящие из большого числа слоев. Теперь в самых разнообразных предметных областях лучшие результаты получаются с помощью глубоких нейронных сетей. Одним из первых громких промышленных успехов стало распознавание речи: разработанные группой Хинтона глубокие сети очень быстро радикально улучшили результаты распознавания, которые превзошли классические подходы к решению данной задачи, оттачивавшиеся десятилетиями. Важный вклад в создание обучающихся нейронных сетей внес французский информатик Ян Лекун – профессор Нью-Йоркского университета и ведущий ученый в области искусственного интеллекта в Facebook. Лекун улучшил метод обратного распространения ошибки, а также известен работами по использованию нейросетей для оптического распознавания символов и машинного зрения. Благодаря работам Хинтона, Бенджо и Лекуна люди научились обучать самые разные архитектуры глубоких нейронных сетей, и те решают абсолютно разные задачи: от распознавания лиц до перевода одного языка на другой, вождения автомобилей и т.д.

Неудивительно, что в 2018 г. Ассоциация вычислительной техники приняла решение удостоить Джеффри Хинтона, Джошуа Бенджо и Яна Лекуна премии Тьюринга – одной из самых престижных наград в области информатики. Премия дана им за «концептуальные и инженерные прорывы, которые сделали нейронные сети критически важным компонентом вычислений».

6. Дьердь Пойа: индукция и аналогия как ключевые стратегии правдоподобных рассуждений

Известно, что британский философ Карл Поппер (1902-1994) недолюбливал индукцию. Ему казалось, что она не играет никакой роли в нашем мышлении. Более того, в некоторых своих работах, посвященных анализу научной деятельности, он утверждал о том, что на самом деле никакой индукции не существует, что индуктивный метод – это миф. Например, в книге [24] философ пишет: «Индукция – это безнадежная путаница, а поскольку проблему индукции можно решить хотя и в отрицательном плане, но, тем не менее, достаточно недвусмысленно, мы можем считать, что индукция не играет никакой органической роли в эпистемологии, или в методе науки и росте науки» [24, с.88].

Если попытаться составить хотя бы приблизительный список научных достижений К.Поппера, то наиболее значимым среди них, безусловно, окажется обнаружение аналогии между развитием науки и биологической эволюцией, описанной Ч.Дарвином. Развивая эту аналогию, К.Поппер (совместно с Д.Кэмпбеллом) пришел к выводу о возможности перенести в концепцию развития научного знания понятие естественного отбора (селекции), содержащееся в теории Ч.Дарвина. Кроме того, К.Поппер перенес в свою концепцию, названную «эволюционной эпистемологией», и ряд других понятий, заимствованных из дарвиновской теории. Однако мы знаем, что аналогия – одна из фундаментальных процедур индуктивного мышления. Таким образом, К.Поппер, критикуя индуктивный метод, сам им достаточно продуктивно пользовался, ввиду чего его можно уподобить известному персонажу французского комедиографа Жана-Батиста Мольера (1622-1673), который в течение всей жизни не знал, что говорит прозой, а не стихами.

Проживший долгую жизнь в науке, американский математик венгерского происхождения Дьердь Пойа (1887-1985) не стал спрашивать у философов, что они думают по поводу индукции. Вместо этого он решил выяснить, как выдающиеся математики делают свои открытия, и можно ли в этом процессе математического открытия найти какие-нибудь правила (повторяющиеся мыслительные операции). Приступив к изучению первоисточников, т.е. математических трудов тех гениев, чьи открытия давно уже перекочевали в школьные учебники, Д.Пойа начал с Леонардо Эйлера (того самого, который решил задачу «семи кенигсбергских мостов» и основал математическую теорию графов).

И тут Д.Пойа натолкнулся на нечто неожиданное: оказалось, что значительная часть открытий Л.Эйлера была сделана при помощи индукции и аналогии – простых, незамысловатых приемов, о которых знал еще Аристотель! Не менее неожиданным оказался тот факт, что Л.Эйлер не скрывал индуктивного происхождения своих находок: он откровенно рассказывал о том, как внимательный анализ теоретико-числовых данных и индуктивное обобщение этих данных приводило его к успеху. Он также не считал нужным скрывать (утаивать) то обстоятельство, что самые блестящие его идеи рождались благодаря аналогии – выявлению связей между далекими, казалось бы, разделами математиками.

Д.Пойа в книге «Математика и правдоподобные рассуждения» [25] приводит один из фрагментов сочинения Л.Эйлера, написанного в 1761 г.: «Поскольку мы должны относить числа к одному лишь чистому разуму, мы едва ли можем понять, как наблюдения и квазиэксперименты могут быть полезны в исследовании природы чисел. Однако в действительности, как я здесь покажу, приведя очень веские доводы, свойства чисел, известные сегодня, по большей части были открыты путем наблюдения и открыты задолго до того, как их истинность была подтверждена строгими доказательствами. Имеется даже много свойств чисел, с которыми мы хорошо знакомы, но которые мы всё еще не в состоянии доказать; только наблюдения привели нас к их познанию. Отсюда мы видим, что в теории чисел, которая всё еще очень несовершенна, наши самые большие надежды мы можем возлагать на наблюдения: они непрерывно будут вести нас к новым свойствам, которые позже мы будем стараться доказать. Этот вид знания, которое подкрепляется только наблюдениями и всё еще не доказано, следует тщательно отличать от истины; оно, как мы обычно говорим, приобретается индукцией» [25, с.25].

Проводя различие между эмпирической индукцией, используемой математиками в процессе открытия новых математических истин, и математической индукцией, которая в случае полноты приобретает строгость дедуктивного силлогизма и применяется при доказательстве уже открытых истин, Д.Пойа сформулировал понятие «правдоподобных рассуждений». В это понятие он, прежде всего, включил эмпирическую индукцию и аналогию. Математическая индукция оказалась «за бортом» этого понятия, так как она, как отмечено, не дает новых знаний, а лишь «узаконивает» их, позволяя доказать их справедливость. Таким образом, Д.Пойа очертил различие (асимметрию) между «контекстом открытия» и «контекстом доказательства». Проанализировав историю открытий Л.Эйлера и других крупных математиков, Д.Пойа понял, что их находки, даже самые поразительные, вызывающие чувство восхищения и какого-то «волшебства» («магии»), - результат применения правдоподобных рассуждений.

Объясняя свое понятие «правдоподобных рассуждений», Д.Пойа в той же книге [25] пишет: «Доказательное рассуждение надежно, неоспоримо и окончательно. Правдоподобное рассуждение рискованно, спорно и условно. Доказательные рассуждения пронизывают науки как раз в той же мере, что и математика, но сами по себе (как и сама по себе математика) не способны давать существенно новые знания об окружающем нас мире. Всё новое, что мы узнаем о мире, связано с правдоподобными рассуждениями, являющимися единственным типом рассуждений, которым мы интересуемся в повседневных делах. Доказательное рассуждение имеет жесткие стандарты, кодифицированные и выясненные логикой (формальной, или доказательной логикой), являющейся теорией доказательных рассуждений. Стандарты правдоподобных рассуждений текучи, и нет никакой теории таких рассуждений, которая могла бы по ясности сравниться с доказательной логикой или обладала бы сравнимой с ней согласованностью» [25, с.14-15].

В другой своей работе, а именно в книге «Как решать задачу» [26], Д.Пойа сравнивает наше повседневное мышление с интеллектуальной деятельностью людей искусства и науки и приходит к следующей оценке аналогии: «Аналогией проникнуто всё наше мышление; наша повседневная речь и тривиальные умозаключения, язык художественных произведений и высшие научные достижения. Степень аналогии может быть различной. Люди часто применяют туманные, двусмысленные, неполные или не вполне выясненные аналогии, но аналогия может достигнуть уровня математической точности. Нам не следует пренебрегать никаким видом аналогии, каждый из них может сыграть определенную роль в поисках решения» [26, с.44-45].

Д.Пойа неоднократно, в том числе в книге «Математическое открытие» [27], подчеркивал, что математическое мышление нельзя считать формальным, оно не базируется на одних лишь аксиомах, определениях и строгих доказательствах. Помимо этого данное мышление включает в себя и многое другое: обобщение рассмотренных случаев, применение индукции, использование аналогии, раскрытие или выделение математического содержания в какой-то конкретной ситуации. Д.Пойа был уверен, что уже в средней школе преподавание математики должно вестись с акцентом на то, чтобы научить молодежь думать, научить ее решать задачи, сформировать продуктивное мышление, основанное на осмысленном применении индукции и аналогии.

Можно предположить, что с работами Д.Пойа своевременно ознакомились не только специалисты в области программ обучения математике, но и разработчики вычислительных машин. Последние, безусловно, поняли, что теория правдоподобных рассуждений, созданная Д.Пойа, имеет прямое отношение к сфере их профессиональных интересов. Как можно пытаться создать искусственный интеллект, если не ставить задачу «встроить» в его программное обеспечение индуктивные схемы рассуждений, которыми пользовался даже такой гений, как Леонард Эйлер? Начались работы по созданию индуктивных машин – вычислительных систем, способности которых не ограничивались бы дедуктивными методами переработки информации.

Говоря о книге Д.Пойа [26], Джозеф Вейценбаум в монографии [28] пишет: «Первое издание книги Пойа было опубликовано в 1945 г., т.е. за несколько лет до того, как электронные вычислительные машины стали практическими инструментами исследования. Уже тогда Пойа заложил фундамент и в определенном смысле провозгласил всю ту работу в области решения задач, т.е. эмпирические правила, которые, будучи примененными, вполне могут привести к решению рассматриваемой задачи или обеспечить некоторый прогресс в ее решении, но не гарантируют получение решения. Таким образом, эвристики не являются алгоритмами и эффективными процедурами; они представляют собой правдоподобные способы подхода к решению специфических задач. Пойа предвосхитил большую часть последующей работы специалистов в области информатики, посвященной решению задач…» [28, с.223].

Литература:

1. Хокинг С. Краткая история времени. – СПб.: «Амфора», 2007. – 231 с.
2. Успенский В.А. Труды по нематематике. С приложением семиотических посланий А.Н.Колмогорова к автору и его друзьям. Том 1. – М.: ОГИ, 2002. – 584 с.
3. Дьюдни А.К. О разуме, машинах и метафизике // журнал «В мире науки», 1990, № 2. – С.82-86.
4. Пенроуз Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.
5. Фресан Х. Сон разума. Математическая логика и ее парадоксы. – М.: изд-во «Де Агостини», 2014. – 144 с.
6. Нагель Э., Ньюмен Дж. Теорема Геделя. – М.: «КРАСАНД», 2010. – 117 с.
7. Хофштадтер Д. Гедель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. – Самара: изд-во «Бахрах-М», 2001. – 752 с.

8. Хофтштадтер Р. Структура ядер и нуклонов // Успехи физических наук. – 1963. – Том 81. - № 1. – С.185-200.
9. Потапов А.С. Искусственный интеллект и универсальное мышление. – СПб.: «Политехника», 2012. – 711 с.
10. Ершов Ю.Л., Целищев В.В. Алгоритмы и вычислимость в человеческом познании. – Новосибирск: изд-во СО РАН, 2012. – 504 с.
11. Арнольд В.И. Математическая дуэль вокруг Бурбаки // Вестник РАН. – 2002. - Том 72. - № 3. – С.245-250.
12. Арнольд В.И. А.Н. Колмогоров и естествознание // Успехи математических наук. – 2004. - Том 59. - № 1 (355). – С.25-44.
13. Синай Я.Г. Воспоминания об А.Н.Колмогорове // сборник «Колмогоров в воспоминаниях учеников». Редактор-составитель А.Н.Ширяев. - М.: МЦНМО, 2006. – С.205-207.
14. Арнольд В.И. От проблемы Гильберта о суперпозициях до динамических систем // сборник «В.И.Арнольд. К восьмидесятилетию». - М: МЦНМО, 2018. – 494 с.
15. Смейл С. Математические проблемы следующего столетия // сборник «Современные проблемы хаоса и нелинейности». – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – С.280-303.
16. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
17. Колмогоров А.Н. К логическим основам теории информации и теории вероятностей // Проблемы передачи информации. – 1969. - Том 5. - № 3. – С.3-7.
18. Глушков В.М. Основы безбумажной информатики. – М.: «Наука», 1982. – 552 с.
19. Малиновский Б.Н. История вычислительной техники в лицах. – Киев: фирма «Кит», ПТОО «АСК», 1995. – 384 с.
20. Азимов А. Путеводитель по науке. От египетских пирамид до космических станций. – М.: «Центрполиграф», 2006. – 788 с.

21. Глушков В.М. Развитие абстрактного мышления и запрет Геделя // Глушков В.М. Кибернетика. Вопросы теории и практики. – М.: «Наука», 1986. – С.133-143.
22. Шамис А.Л. Пути моделирования мышления. – М.: «КомКнига», 2006. – 336 с.
23. Домингос П. Верховный алгоритм. Как машинное обучение изменит наш мир. – М.: изд-во «Манн, Иванов и Фербер», 2016. – 336 с.
24. Поппер К. Объективное знание. Эволюционный подход. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 384 с.
25. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: «Наука», 1975. – 464 с.
26. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: «УЧПЕДГИЗ», 1959. – 207 с.
27. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: «Наука», 1976. – 448 с.
28. Вейценбаум Дж. Возможности вычислительных машин и человеческий разум. От суждений к вычислениям. – М.: «Радио и связь», 1982. – 368 с.