УДК 535.31

Дмитерко Руслан Алексеевич,
кандидат физико-математических наук.
доцент кафедры ОПД
Московское высшее общевойсковое командное училище
Россия, г. Москва
Страхов Андрей Александрович,
преподаватель кафедры ОПД
Московское высшее общевойсковое командное училище
Россия, г. Москва

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТОНКОГО ТРИПЛЕТА-АПОХРОМАТА

Аннотация: *Разработан аналитический метод расчета конструктивных параметров апохромата-триплета в области приближения бесконечно-тонких линз. Для расчета условия апохроматизации применена дисперсионная формула Бучдала (H.A. Buchdahl) 3-й степени. Выводятся расчетные формулы для вычисления оптических сил тонких линз триплета из условия минимизации некоторой функции ошибки SS – условие апохроматизации объектива. Устанавливаются численные критерии для определения степени апохроматизации триплета. Приведены конструктивные параметры оптической схемы триплета-апохромата с использованием стекол с нормальным ходом дисперсии.*

Ключевые слова: *метод расчета, апохромат, вторичный спектр, тонкий триплет, дисперсионная формула.*

Dmiterko Ruslan Alekseevich
Doctor of Philosophy (Ph.D) in phisics and mathematics
associate Professor of OPD Department Moscow higher arms command school
Russia, Moscow
Strakhov Andrei Alexandrovich
teacher of the OPD Department Moscow higher arms command school
Russia, Moscow

ANALYTICAL CALCULATION OF DESIGN PARAMETERS OF A THIN APO-TRIPLET

Annotation: *an analytical method has been developed for calculating the design parameters of an apo-triplet in the region of infinitely thin lenses approximation. To calculate the achromatization condition, the 3rd degree dispersion formula of H. A. Buchdahl was applied. Calculation formulas for calculating the optical forces of thin triplet lenses are derived from the condition for minimizing a certain SS error function – the lens achromatization condition. Numerical criteria for determining the degree of triplet achromatization are established. The design parameters of the optical scheme of apo-triplet using glasses with a normal course of dispersion are given.*

Keywords: *calculation method, apo-lens, secondary spectrum, thin triplet, dispersion formula.*

1 Введение

Проблема апохроматизации оптических систем различного назначения остается актуальной и по сей день, несмотря на заметные достижения в этой области. Разработка новых оптических материалов с особым ходом дисперсии позволила облегчить задачу коррекции вторичного спектра. Вместе с тем, некоторые физические свойства и высокие цены особых стекол ограничивают их применение в оптических системах специального назначения и в системах, работающих в экстремальных условиях. Классические материалы (стекла с нормальным ходом дисперсии) в этом смысле являются, в большинстве своем,

более подходящими для построения систем с исправленным вторичным спектром. Однако, как показано в ряде работ [1, 3, 4, 10, 11], коррекция вторичного спектра стеклами с нормальным ходом дисперсии затруднительна и связана с необходимостью применения усложненных схемных и конструктивных решений.

Целью данной работы является поиск новых технических решений для создания компактных оптических систем с исправленным вторичным спектром, в том числе, на основе стекол с нормальным ходом дисперсии. Разработанный алгоритм рассматривается на примере тонкого объектива-триплета.

2 Алгоритм апохроматизации тонкого триплета

В периодической литературе опубликован ряд работ [4, 6, 7], в которых авторы используют представление зависимости показателя преломления оптической среды в виде дисперсионной формулы Бучдала (1). Такое представление дает существенные преимущества по сравнению с известными дисперсионными формулами Шотта, Зельмайера и др. при проведении численных расчетов в плане их упрощения.

$$n(\omega) = n_0 + \sum_{i=1}^{i=s} V_i \omega^i \ , \qquad (1)$$

где $\omega = \dfrac{\lambda - \lambda_0}{1 + 2.5(\lambda - \lambda_0)}$ - цветовая координата,

λ – длина волны, мкм,

λ_0 –базовая длина волны (принимается равной 0,574 мкм [6]),

s – порядок дисперсионной формулы,

V_i – коэффициент дисперсионной формулы.

Для определения коэффициентов V_i дисперсионной формулы (1) авторами был разработан практический алгоритм расчета. В качестве исходных данных были использованы каталожные значения коэффициентов дисперсионных формул. Исходя из этих данных, были вычислены коэффициенты дисперсионной формулы Бучдала 3-й, 4-ой и 5-й степеней для 500 стекол из каталогов фирм Schott, Ohara и ЛЗОС – основных изготовителей оптического стекла, что

позволило при разработке алгоритма апохроматизации тонкого триплета использовать дисперсионную формулу Бучдала.

Алгоритм основан на методе квадратов и, в отличие от работы [9], где приведены соотношения для расчета коэффициентов V_i дисперсионной формулы (1) только исходя из коэффициентов дисперсионной формулы Зельмайера, позволяет рассчитывать указанные коэффициенты для тех оптических сред, которые имеют запись дисперсионных соотношений в виде формул Шотта, Герцбергера и Резника.

Запишем выражения для оптической силы тонких линз триплета от цветовой координаты ω в следующем виде (здесь используется дисперсионная формула Бучдала 3-ей степени):

$$\Phi_1 = Z_1(1+a_1\omega+a_2\,\omega^2+a_3\omega^3),$$
$$\Phi_2 = Z_2(1+b_1\omega+b_2\omega^2+b_3\omega^3), \qquad (2)$$
$$\Phi_3 = Z_3(1+c_1\omega+c_2\omega^2+c_3\omega^3),$$

где

$Z_1= (n_{01}–1)\Delta\rho_1$ – оптическая сила 1-й линзы для $\lambda =\lambda_0$, дптр,

$\Delta\rho_1=1/R_{11}–1/R_{12}$ – разность кривизн оптических поверхностей 1-й линзы, $м^{-1}$,

$Z_2= (n_{02}–1)\Delta\rho_2$ – оптическая сила 2-й линзы для $\lambda =\lambda_0$, дптр,

$\Delta\rho_2=1/R_{21}–1/R_{22}$ – разность кривизн оптических поверхностей 2-й линзы, $м^{-1}$, $Z_3= (n_{03}–1)\Delta\rho_3$ – оптическая сила 3-й линзы для $\lambda =\lambda_0$, дптр,

$\Delta\rho_3=1/R_{31}–1/R_{32}$ – разность кривизн оптических поверхностей 3-й линзы, $м^{-1}$.

В выражениях (2) применяются нормированные значения коэффициентов дисперсионной формулы Бучдала [7], [8]. Для 1-й линзы они определяются следующим образом (для 2-й и 3-й линз - аналогично):

$$a_1 = V_1/(n_{01}–1), \quad a_2 = V_2/(n_{01}–1), \quad a_3 = V_3/(n_{01}–1) \qquad (3)$$

Оптическую силу тонкого триплета в зависимости от цветовой координаты ω определим как сумму оптических сил составляющих линз:

$$F(\omega) = \Phi_1+\Phi_2+\Phi_3 = (Z_1+Z_2+Z_3) + (a_1Z_1+b_1Z_2+c_1Z_3)\omega +$$
$$+(a_2Z_1+b_2Z_2+c_2Z_3)\,\omega^2 + (a_3Z_1+b_3Z_2+c_3Z_3)\,\omega^3 \qquad (4)$$

Условием апохроматизации триплета является независимость его оптической силы от цветовой координаты ω. Используя нормировку $\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3 = 1$, составим целевую функцию SS (функцию ошибки), подлежащую минимизации для выполнения этого условия:

$$SS(\omega) = (F-1)^2 \qquad (5)$$

Подставим в (5) выражение для функции $F(\omega)$ из (4) и после очевидных преобразований запишем функцию SS как степенную функцию от независимой переменной ω:

$$SS(\omega) = (a_3Z_1+b_3Z_2+c_3Z_3)^2\omega^6+2(a_2Z_1+b_2Z_2+c_2Z_3)(a_3Z_1+b_3Z_2+c_3Z_3)\omega^5+$$
$$+[2(a_1Z_1+b_1Z_2+c_1Z_3)(a_3Z_1+b_3Z_2+c_3Z_3)+(a_2Z_1+b_2Z_2+c_2Z_3)^2]\omega^4+$$
$$+[2(Z_1+Z_2+Z_3-1)(a_3Z_1+b_3Z_2+c_3Z_3)+2(a_1Z_1+b_1Z_2+c_1Z_3)(a_2Z_1+b_2Z_2+c_2Z_3)]\omega^3+$$
$$+[2(Z_1+Z_2+Z_3-1)(a_2Z_1+b_2Z_2+c_2Z_3)+(a_1Z_1+b_1Z_2+c_1Z_3)]\omega^2+$$
$$+2(Z_1+Z_2+Z_3-1)(a_1Z_1+b_1Z_2+c_1Z_3)\omega+(Z_1+Z_2+Z_3-1)^2.$$

Учитывая, что функция ошибки SS является сугубо положительной функцией (как квадрат некоторого выражения) одной переменной ω, поставим в соответствие ей некоторое положительное число INT, являющееся площадью фигуры, заключенной между осью абсцисс и функцией SS. Для этого найдем аналитически определенный интеграл от функции SS в пределах от $\omega_1 = -0{,}112602$ (голубая линия водорода F) до $\omega_2 = 0{,}068237$ (красная линия водорода C):

$$INT = \int_{\omega 1}^{\omega 2} SS(\omega)\partial\omega = (a_3Z_1+b_3Z_2+c_3Z_3)^2k_7+2(a_2Z_1+b_2Z_2+c_2Z_3)(a_3Z_1+b_3Z_2+c_3Z_3)k_6+$$
$$+[2(a_1Z_1+b_1Z_2+c_1Z_3)(a_3Z_1+b_3Z_2+c_3Z_3)+(a_2Z_1+b_2Z_2+c_2Z_3)^2]k5+$$
$$+[2(Z_1+Z_2+Z_3-1)(a_3Z_1+b_3Z_2+c_3Z_3)+2(a_1Z_1+b_1Z_2+c_1Z_3)(a_2Z_1+b_2Z_2+c_2Z_3)]k_4+$$
$$+[2(Z_1+Z_2+Z_3-1)(a_2Z_1+b_2Z_2+c_2Z_3)+(a_1Z_1+b_1Z_2+c_1Z_3)^2]k_3+$$
$$+2(Z_1+Z_2+Z_3-1)(a_1Z_1+b_1Z_2+c_1Z_3)k_2+(Z_1+Z_2+Z_3-1)^2k_1,$$

где соответствующие постоянные после проведения интегрирования в указанных пределах равны:

$k_7 = (w_2^7-w_1^7)/7 = 0.3377250673899488\cdot10^{-7}$,

$k_6 = (w_2^6-w_1^6)/6 = -0.3229263412371329\cdot10^{-6}$,

$k_5 = (w_2^5 – w_1^5)/5 = 0.3916114188411839 \cdot 10^{-5}$,

$k_4 = (w_2^4 – w_1^4)/4 = –0.3477525499014654 \cdot 10^{-4}$,

$k_3 = (w_2^3 – w_1^3)/3 = 0.5817563487694264 \cdot 10^{-3}$,

$k_2 = (w_2^2 – w_1^2)/2 = – 0.4012421559518050 \cdot 10^{-2}$,

$k_1 = w_2 – w_1 = 0.1808262275$.

Функция $INT(Z_1,Z_2,Z_3)$ является функцией трех независимых переменных Z_1, Z_2 и Z_3. Точка локального минимума этой функции определяет условия, при которых триплет является апохроматом, так как при этом его оптическая сила в спектральном диапазоне длин волн F - C мало отличается от единицы. Необходимо также отметить, что значение функции INT указывает на степень апохроматизации объектива.

Для определения точки локального экстремума функции INT продифференцируем ее по трем переменным Z_1,Z_2 и Z_3. Для упрощения вычислений предварительно запишем функцию INT в следующем виде:

$$INT(Z_1,Z_2,Z_3) = e_1Z_1^2+(e_2Z_2+e_3Z_3+e_4)Z_1+e_5Z_2^2+(e_6Z_3+e_7)Z_2+e_8Z_3^2+e_9Z_3+k_1 , \quad (6)$$

где вспомогательные величины $e_1 \ldots e_9$ определяются выражениями:

$e_1 = (2a_2+a_1^2)k_3+(2a_3+2a_1a_2)k_4+(2a_1a_3+a_2^2)k_5+2a_1k_2+2a_2a_3k_6+a_3^2k_7+k_1$,

$e_2 = (2b_1a_3+2a_1b_3+2b_2a_2)k_5+2(b_2a_3+a_2b_3)k_6+2b_3a_3k_7+(2a_3+2b_1a_2+2b_3+2a_1b_2)k_4+2k_1+$
$+2(a_1+b_1)k_2+(2a_2+2b_2+2b_1a_1)k_3$,

$e_3 = (2c_1a_3+2a_1c_3+2c_2a_2)k_5+2c_3a_3k_7+(2a_3+2a_1c_2+2c_3+2c_1a_2)k_4+2k_1+2(a_1+c_1)k_2+$
$+2(c_2a_3+a_2c_3)k_6+(2a_2+2c_2+2c_1a_1)k_3$,

$e_4 = –2k_1–2a_3k_4–2a_2k_3–2a_1k_2$,

$e_5 = (2b_2+b_1^2)k_3+2b_2b_3k_6+2b_1k_2+(2b_3+2b_1b_2)k_4+k_1+b_3^2k_7+(2b_1b_3+b_2^2)k_5$,

$e_6 = 2c_3b_3k_7+2(b_1+c_1)k_2+(2c_1b_3+2b_1c_3+2c_2b_2)k_5+2k_1+(2b_3+2c_3+2c_1b_2+2b_1c_2)k_4+$
$+2(c_2b_3+b_2c_3)k_6+(2b_2+2c_2+2c_1b_1)k_3$,

$e_7 = –2b_1k_2–2b_2k_3–2k_1–2b_3k_4$,

$e_8 = c_3^2k_7+(2c_1c_3+c_2^2)k_5+(2c_3+2c_1c_2)k_4+(2c_2+c_1^2)k_3+2c_2c_3k_6+k_1+2c_1k_2$,

$e_9 = –2k_1–2c_3k_4–2c_2k_3–2c_1k_2$.

Проведя дифференцирование функции INT, записанной в виде (6), получаем частные производные. Для нахождения точки локального экстремума составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Int}{\partial Z_1} = 2e_1Z_1 + e_2Z_2 + e_3Z_3 + e_4 = 0 \\ \dfrac{\partial Int}{\partial Z_2} = e_2Z_1 + 2e_5Z_2 + e_6Z_3 + e_7 = 0 \\ \dfrac{\partial Int}{\partial Z_3} = e_3Z_1 + e_6Z_2 + 2e_8Z_3 + e_9 = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

Решением системы уравнений (7) являются следующие значения:

$$\begin{cases} Z_1^* = \dfrac{2e_5e_3e_9 - 4e_5e_4e_8 - e_6e_3e_7 - e_2e_6e_9 + 2e_2e_7e_8 + e_4e_6^2}{2Z_0} \\ Z_2^* = \dfrac{2e_1e_6e_9 - 4e_1e_7e_8 - e_2e_3e_9 - e_3e_6e_4 + 2e_2e_4e_8 + e_7e_3^2}{2Z_0} \\ Z_3^* = \dfrac{2e_5e_3e_4 - 4e_5e_1e_9 - e_6e_2e_4 - e_2e_3e_7 + 2e_1e_7e_6 + e_9e_2^2}{2Z_0} \end{cases}$$

где вспомогательная величина

$$Z_0 = -e_2^2e_8 + 4e_5e_1e_8 - e_3^2e_5 + e_2e_6e_3 - e_6^2e_1. \qquad (8)$$

Необходимо отметить, что для получения значимых значений величин Z_1, Z_2 и Z_3, все промежуточные вспомогательные постоянные должны вычисляться с не менее чем 30-ю значащими цифрами, так как порядок величины Z_0 составляет 10^{-16}.

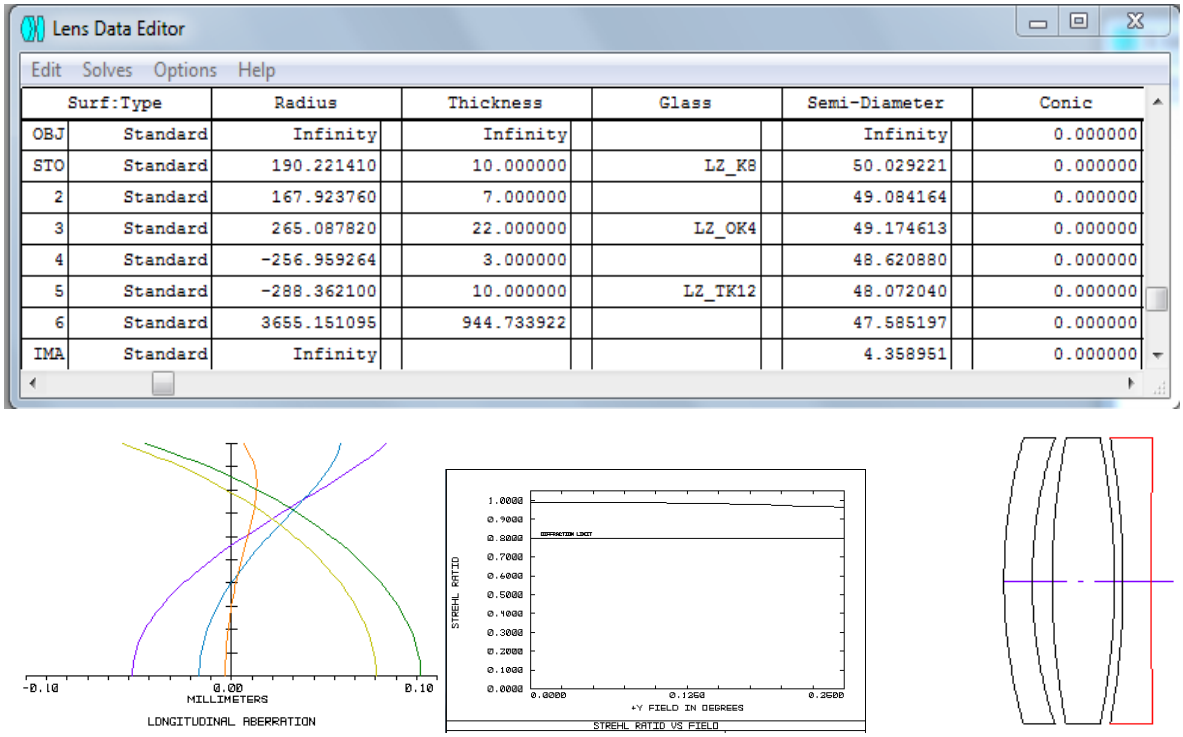
Подставляя вычисленные значения величин Z_1*, Z_2* и Z_3* в выражение (6), можно определить значение функции INT и возможную степень апохроматизации объектива. Предварительно можно определить, что апохроматы имеют значения INT < $1\cdot10^{-10}$, а ахроматы соответственно INT > $1\cdot10^{-8}$.

Полученные значения величин Z_1^*, Z_2* и Z_3* являются исходными данными для определения некоторых начальных значений радиусов кривизны

шести оптических поверхностей $R_1 \ldots R_6$. Дальнейшая оптимизация оптической системы при конечных значениях апертуры и толщин воздушных промежутков (линз) проводится при помощи специализированных программных комплексов, например ZEMAX [5].

3 Расчет объективов

Приведем результаты расчета некоторых оптических систем с исправленным вторичным спектром в соответствие с разработанным алгоритмом.



Surf:Type		Radius	Thickness	Glass	Semi-Diameter	Conic
OBJ	Standard	Infinity	Infinity		Infinity	0.000000
STO	Standard	190.221410	10.000000	LZ_K8	50.029221	0.000000
2	Standard	167.923760	7.000000		49.084164	0.000000
3	Standard	265.087820	22.000000	LZ_OK4	49.174613	0.000000
4	Standard	-256.959264	3.000000		48.620880	0.000000
5	Standard	-288.362100	10.000000	LZ_TK12	48.072040	0.000000
6	Standard	3655.151095	944.733922		47.585197	0.000000
IMA	Standard	Infinity			4.358951	0.000000

Рисунок* 1 *Результаты оптимизации системы К8-ОК4-ТК12

В качестве пробного теста работы алгоритма рассчитаем известную апохроматическую систему К8–ОК4–ТК12. Вычислим указанные в разделе 2 величины Z_1^*, Z_2^* и Z_3^* (результаты промежуточных вычислений вспомогательных величин опускаем) и определим значение параметра INT, отвечающее апохроматическому решению:

$Z_1^* = -0.0105$ дптр

$Z_2^* = 3.1680$ дптр

$Z_3^* = -2.1574$ дптр

Параметр **INT = 0.5895·10^{-12}.**

Результаты оптимизации системы с апертурой 100 мм и относительным отверстием 1:10 приведены на рисунке 1. Оптимизация проводилась в среде программного комплекса оптимизации оптических систем ZEMAX.

Из представленного расчета видно, что с точки зрения устранения хроматизма применение компонента из стекла К8 не является оптимальным ввиду малой оптической силы данного компонента. Это связано с тем, что частная дисперсия P_{Fe} стекла К8 меньше соответствующей частной дисперсии стекла ОК4: для К8: P_{Fe} = 0.453754, для ТК12 P_{Fe} = 0.454709, для ОК4 P_{Fe} = 0.454418.

Для выравнивания оптических сил отрицательных компонентов взамен стекла К8 подберем такое стекло, чтобы его частная дисперсия находилась примерно в середине диапазона ОК4–ТК12. Например, для стекла N–PSK3 частная дисперсия P_{Fe}= 0.454503. Произведем соответствующий расчет системы N – PSK3 – ОК4 – ТК12.

Аналогично предыдущему расчету определим значение параметра INT для системы N - PSK3 - ОК4 - ТК12:

Z_1 = – 0.1993 дптр,

Z_2 = 3.1724 дптр,

Z_3 = – 1.9731 дптр.

Параметр **INT = 0.5830·10^{-12}.**

Оптические силы отрицательных компонент выровнялись. Параметр **INT** уменьшился по величине.

Рассчитаем теперь систему на стеклах с нормальным ходом дисперсии.

Из литературы [2] известно, что триплеты на сверхтяжелых лантановых кронах имеют удовлетворительное исправление вторичного спектра в видимой области. Одной из таких систем является система ТК21–СТК9–ЛК3, найденная с помощью разработанного алгоритма. Расчетные параметры имеют следующие значения:

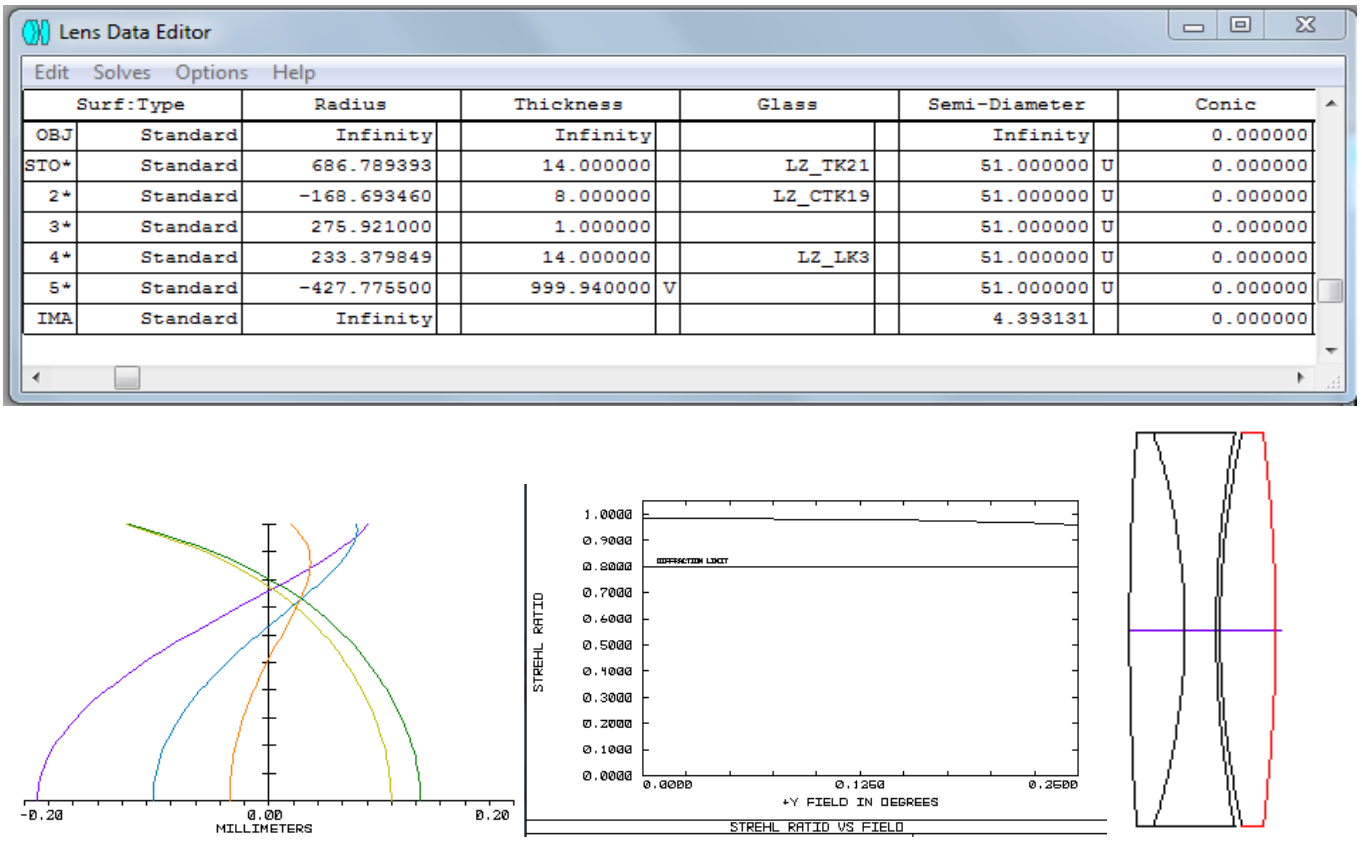
Z_1 = 5.6698 дптр,

Z_2 = – 7.8583 дптр,

Z_3 = 3.1885 дптр.

Параметр **INT = 0.3422·10^{-12}**

Результаты оптимизации системы с параметрами D = 100 мм и F/D = 1:10 приведены на рисунке 2.



	Surf:Type	Radius	Thickness	Glass	Semi-Diameter	Conic
OBJ	Standard	Infinity	Infinity		Infinity	0.000000
STO*	Standard	686.789393	14.000000	LZ_TK21	51.000000 U	0.000000
2*	Standard	-168.693460	8.000000	LZ_CTK19	51.000000 U	0.000000
3*	Standard	275.921000	1.000000		51.000000 U	0.000000
4*	Standard	233.379849	14.000000	LZ_LK3	51.000000 U	0.000000
5*	Standard	-427.775500	999.940000 V		51.000000 U	0.000000
IMA	Standard	Infinity			4.393131	0.000000

Рисунок 2 Результаты оптимизации системы ТК21-СТК19-ЛК3

Из приведенных данных видно, что исправление вторичного спектра в этой системе достаточно для того, чтобы классифицировать ее как супер апохромат. Таким образом, параметр **INT** адекватно отражает степень апохроматизации (исправления вторичного спектра) оптической системы.

4 Обсуждение результатов

Предварительные результаты проведенных расчетов показывают, что возможно аналитически вычислить некоторый параметр INT, позволяющий выделить оптические системы с исправленным вторичным спектром (апохроматы). Одновременно рассчитываются оптические силы всех трех

компонентов. Необходимо указать, что с помощью приведенных соотношений рассчитываются параксиальные конструктивные параметры и обеспечивается исправление вторичного спектра (при достаточно малом значении параметра INT) только в параксиальной области.

Для исправления хроматизма на широком зрачке приходится учитывать влияние сферохроматической аберрации. Именно эта аберрация, т.е. зависимость сферической аберрации от длины волны, не позволяет в подавляющем количестве случаев исправить вторичный спектр на широком зрачке. Единственным пока обнаруженным исключением (не рассматриваются системы на особых стеклах типа фтор фосфатный крон ОК4) являются системы на стеклах СТК9 (СТК19), представленные в статье и позволяющие конструктору рассчитывать апохроматические системы с широким зрачком.

Приведенный в статье алгоритм может быть распространен на апохроматы, состоящие из четырех и пяти линз. При использовании четырех и более стекол в оптической схеме сильно возрастает как количество возможных вариантов, так и вероятность получения систем с хорошим исправлением вторичного спектра на широком зрачке. В отличие от параксиальной области, где безразлично взаимное положение стекол в системе, в оптических системах с широким зрачком данный фактор может играть решающую роль в решении задачи исправления вторичного спектра.

Дальнейшее развитие алгоритма, на взгляд авторов, должно заключаться в учете в функции ошибки SS некоторых параметров, зависящих от коэффициентов Зейделя S1 (сферическая аберрация) и S2 (кома). Такая запись функции ошибки позволит сразу рассчитывать конструктивные параксиальные параметры тонкого апохромата с исправленной комой, т. е. апланата.

В связи с большим количеством возможных вариантов сочетаний оптических сред представляет интерес дальнейшее развитие алгоритма с чисто математической точки зрения в направлении возможности нахождения аналитического решения некоторого неравенства при задании конкретного значения параметра INT, соответствующего варианту апохроматического

решения. Тогда при задании двух конкретных оптических сред возможно определение области, где находится 3-я оптическая среда, отвечающая за существование апохроматического решения.

5 Заключение

В данной работе представлены аналитические соотношения для вычисления параксиальных конструктивных параметров тонкого триплета-апохромата. Алгоритм с математической точки зрения является по своей сути универсальным и позволяет расширить область своего действия на четырех и пяти линзовые объективы, а также на системы с конечным расстоянием между двумя сложными оптическими компонентами. Для проведения расчета требуется представление показателей преломления оптических сред в виде дисперсионной формулы Бучдала**.** Критерием исправления вторичного спектра является параметр INT. Представлена оптическая система триплета с исправленным вторичным спектром на основе найденной триады стекол с нормальным ходом дисперсии.

Литература:

1. Чуриловский В.Н. Теория хроматизма и аберраций третьего порядка. «Машиностроение», Ленинград, 1968. – 312 с.

2. Попов Г.М. Современная астрономическая оптика. М.; Наука, 1988. - 192с.

3. P.N. Robb, “Selection of optical glasses. 1: two materials”, Appl. Opt. **24** (12), 1864-1877 (1985).

4. R.D. Sigler, “Glass selection for airspaced apochromats using the Buchdahl dispersion equation”, Appl. Opt. **25** (23), 4311-4320 (1986).

5. ZEMAX 12 R2 SP2 IE, S/N 34581. Optical Design Program. 2012 г.

6. M. Bolser. Mercado/Robb/Buchdahl Coefficients - An Update of 243 Common Glasses. Proc. of SPIE, v.4832 (2002), p.525.

7. R.I. Mercado and P.N. Robb, “Calculation of refractive Indices using Buchdahl’s Chromatic Coordinate”, Appl. Opt. **22**, p. 1198 (1983).

8. Chia-Ling Li and Jose Sasian, ”Adaptive dispersion formula for index interpolation and chromatic aberration correction”, Opt. Expr. **22**(1), 1193-1202 (2014).
9. P.J. Reardon and R.A. Chipman, ”Buchdahl’s glass dispersion coefficients calculated from Schott equation constant”, Appl.Opt. **28**(15), 3520-3523 (1989).
10. J.L. Rayces and M. Rosete-Aguilar, ”Selection of glasses for achromatic doublets with reduced secondary spectrum. I. Tolerance conditions for secondary spectrum, spherochromatism, and fifth-order spherical aberration”, Appl. Opt. **40**(31), 5663-5676 (2001).
11. S. Chatterjee and L. Hazra, ”Structural design of cemented triplets by genetic algorithm”, Opt. Eng. **43**(2), 432-440 (2004).