УДК 004.02

Козлов Е.Р.
Студент
2 курс, факультет «Космический»
Мытищинский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана
Россия, г. Мытищи

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КА

Аннотация: *Статья посвящена описанию математической модели движения космического аппарата. В ней рассказывается какие задачи решает данная модель. Разбор реализации для требуемой точности. Также, идет повествование о влиянии внешних факторов на формирование самой модели.*

Ключевые слова: *математическая модель движения, точность реализации, внешние факторы, космический аппарат, задачи для решения.*

Annotation: *The article is devoted to the description of the mathematical model of the spacecraft motion. It describes what tasks this model solves. Parsing the implementation for the required accuracy. Also, there is a story about the influence of external factors on the formation of the model itself.*

Key words: *mathematical model of motion, implementation accuracy, external factors, spacecraft, problems to solve.*

Движение орбитальных объектов является достаточно сложным, так как оно совершается в реальных условиях под действием многих факторов: свойств среды, конструкции самого КА, функционирования его системы управления. Эти обстоятельства затрудняют знания параметров движения КА в полном объеме. Поэтому при НБО полета КА для получения его параметров движения действительный процесс орбитального движения описывается упрощенной (в рамках допустимого), удобной для обозрения ММД КА. ММД представляет собой совокупность дифференциальных уравнения движения КА, полученных на основе моделей физических сил и факторов, действующих на спутник, и метода интегрирования уравнений движения в выбранной СК.

ММД решает следующие задачи:

- интегрирование СДУ движения КА;
- интерполяция на заданное значение параметра;
- выдача результатов интегрирования в требуемых СК.

ММД является основным компонентом, обеспечивающим другие целевые подсистемы и программы комплекса кинематическими параметрами на любой момент времени.

Входными данными для работы ММД являются массивы информации, хранящиеся в ББД:

- вектор кинематических параметров КА с расширением;
- логическая шкала сил (ЛШС) моделирования движения, определяющая состав учитываемых при моделировании возмущений, метод интегрирования и СК интегрирования;
- массив общих данных по КА, содержащий технологические характеристики, параметры метода интегрирования и типовые ЛШС моделирования движения;
- циклограмма управления ДУ;
- массивы коэффициентов для учета влияния действующих на КА сил: притяжения Земли, притяжения Луны, Солнца, сопротивления атмосферы;
- оперативные массивы астрономического ежегодника.

Указанные входные данные формируются в ББД заблаговременно и загружаются из ББД при первичной настройке рабочего поля ММД. Кроме того, оперативные данные астрономического ежегодника и циклограмма управления ДУ загружаются по мере необходимости в процессе моделирования орбитального движения, что обеспечивает гибкость и независимость процесса моделирования от объемов имеющейся оперативной памяти и интервалов моделирования.

ММД состоит из управляющей программы и набора подпрограмм, осуществляющих проверку наличия и состояния поля модели, создание или загрузку поля модели, обеспечение интегрирования СДУ движения методом Рунге-Кутты-Адамса, расчет значений контролируемых параметров при моделировании орбитального движения и выдачу результатов.

Основное требование к ММД – наилучшее приближение расчетной траектории движения КА к его истинному движению. Рассогласование между расчетной и истинной траекториями, выраженное в виде разностей координат в конкретный момент времени, называют точностью модели. В общем случае точность ММД КА зависит от ряда факторов, основными из которых являются полнота учета возмущений, действующих на КА в полете, и метод решения СДУ движения.

Для реализации требуемой точности и оперативности моделирования движения КА правые части СДУ настраиваются по составу учитываемых факторов и их вариантов и могут учитывать влияние следующих сил и факторов [2]:

– гравитационное притяжение Земли (модель ГПЗ в виде разложения в ряд по сферическим функциям обеспечивает учет полного числа гармоник до 36 степени включительно с возможностью выборочного учета гармоник);

– гравитационное притяжение Луны, Солнца, планет солнечной системы;

– давление прямой солнечной радиации с учетом постоянного значения коэффициента светового давления КА;

– управляющие воздействия от ДУ в орбитальной, орбитальной инерциальной или скоростной СК с возможностью отработки последовательной совокупности включений ДУ;

– при использовании динамической модели плотности атмосферы дополнительно могут учитываться текущие и прогнозируемые индексы солнечной активности (СА) и геомагнитной возмущенности (ГМВ);

– при реализации преобразований кинематических параметров между СК могут учитываться текущие и прогнозируемые значения параметров вращения Земли (ПВЗ).

Уравнения движения КА в проекциях на оси АСК имеют следующий вид [2]:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_X &= -b_0\frac{X}{r^3} + \sum_{j=1}^{2} b_j\left(\frac{X_j - X}{\Delta_j^3} - \frac{X_j}{r_j^3}\right) + \Delta g_X + D_X + F_X + P_X;\\
\dot{V}_Y &= -b_0\frac{Y}{r^3} + \sum_{j=1}^{2} b_j\left(\frac{Y_j - Y}{\Delta_j^3} - \frac{Y_j}{r_j^3}\right) + \Delta g_Y + D_Y + F_Y + P_Y;\\
\dot{V}_Z &= -b_0\frac{Z}{r^3} + \sum_{j=1}^{2} b_j\left(\frac{Z_j - Z}{\Delta_j^3} - \frac{Z_j}{r_j^3}\right) + \Delta g_Z + D_Z + F_Z + P_Z;\\
\dot{X} &= V_X;\ \dot{Y} = V_Y;\ \dot{Z} = V_Z,
\end{aligned} \tag{1}$$

где X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z – координаты радиуса-вектора и проекции скорости КА;

$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$;

$r_j = \sqrt{X_j^2 + Y_j^2 + Z_j^2}$;

$\Delta_j = \sqrt{(X_j - X)^2 + (Y_j - Y)^2 + (Z_j - Z)^2}$;

j = 1 для Луны; j = 2 для Солнца;

b_0 – гравитационная постоянная Земли;

b_1 – гравитационная постоянная Луны;

b_2 – гравитационная постоянная Солнца;

$\Delta \vec{g}$ – вектор ускорения от аномальной части геопотенциала;

$\vec{D}$ – вектор ускорения от сил светового давления Солнца;

$\vec{F}$ – вектор ускорения от сил аэродинамического торможения;

$\vec{P}$ – вектор ускорения от тяги ДУ.

Основным фактором, определяющим движение КА, является геопотенциал Земли, возмущающая часть которого задает общую эволюцию орбиты. Эволюция орбиты под действием остальных возмущающих факторов примерно в 1000 раз меньше действия геопотенциала.

Первый член в уравнениях движения определяет силу притяжения Земли, принимаемой в виде тела сферической формы. Проекции ускорения КА, обусловленные аномалиями геопотенциала, вычисляются по формулам [4]:

$$\begin{Vmatrix} \Delta g_x \\ \Delta g_y \\ \Delta g_z \end{Vmatrix} = \Lambda n \begin{Vmatrix} \Delta g_r \\ \Delta g_m \\ \Delta g_l \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

Радиальная, меридиональная и нормальная проекции ускорения, вызванные влиянием аномальной части геопотенциала, вычисляются по формулам [4]:

$$\Delta g_r = \frac{b_0}{r^2} \sum_{n=2}^{z} (n+1)\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} (C_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi);$$

$$\Delta g_m = \frac{b_0}{r^2} \sum_{n=2}^{z} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} (C_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda)(mtg\varphi P_{nm}(\sin \varphi) - P_{nm+1}(\sin \varphi))$$

3)

$$\Delta g_r = \frac{b_0}{r^2 \cos \varphi} \sum_{n=2}^{z} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} (-C_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda) m P_{nm}(\sin \varphi),$$

где r, φ, λ – сферические координаты КА;

a_e – большая полуось общеземного эллипсоида (ОЗЭ);

C_{nm}, D_{nm} – коэффициенты разложения ГПЗ в ряд по сферическим функциям;

$P_{nm}(\sin\varphi)$ – присоединенные функции Лежандра.

При расчете ускорений, обусловленных возмущениями геопотенциала, учитывается прецессия и нутация земной оси, так как из-за пространственного поворота земного сфероида в инерциальной геоцентрической СК геопотенциал изменяется.

При описании гравитационных воздействий Луны и Солнца на движение КА рассматриваются отдельно системы Солнце-КА-Земля и Луна-КА-Земля. В этом случае приходят к решению двух ограниченных задач трех тел. Возмущающая сила при этом записывается в виде [2]:

$$\vec{R} = b_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{\Delta_j^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right), \tag{4}$$

где $j = 1$ для Луны; $j = 2$ для Солнца.

Проекции данной возмущающей силы на оси АСК есть вторые слагаемые в уравнениях движения КА (1).

При моделировании влияния светового давления Солнца на движение КА принимается, что коэффициент отражения поверхности и площадь поперечного сечения КА, нормального к световому потоку, являются постоянными величинами. Тогда проекции возмущающего ускорения *D*, обусловленного световым давлением, являются частными производными от возмущающей функции [2]:

$$D = -K_C g_C \frac{S_C}{m} \frac{r^2}{\Delta^2}, \tag{5}$$

где K_C – коэффициент отражения поверхности спутника;

S_C – площадь поперечного сечения КА, нормального к световому потоку;

m – текущая масса КА;

g_C – световое давление Солнца в районе орбиты Земли;

r – средний радиус орбиты Земли;

Δ – расстояние от КА до Солнца.

Учет атмосферного торможения на движение КА производится в проекциях на оси ГСК по формулам:

$$F_x = -S_b \rho V V_x;$$
$$F_y = -S_b \rho V V_y; \qquad (6)$$
$$F_z = -S_b \rho V V_z,$$

где $S_b = \dfrac{C_x S_m}{2m}$ – баллистический коэффициент КА;

C_x – аэродинамический коэффициент лобового сопротивления КА;

S_m – площадь миделевого сечения КА;

ρ – плотность атмосферы Земли;

C_x – аэродинамический коэффициент лобового сопротивления КА.

Перевод ускорений из ГСК в АСК производится в соответствии с алгоритмом преобразования, изложенным в [3].

Коэффициент C_x может быть постоянным или переменным. Способ учета переменности аэродинамического коэффициента определяется указанным в ЛШС вариантом учета переменных аэродинамических характеристик.

Численные методы интегрирования, используемые при решении СДУ движения КА, разделяются на одноточечные и многоточечные. Одноточечные методы для вычисления очередных значений параметров движения КА используют только значения этих параметров в предшествующей точке орбиты КА. Порядок метода определяется числом учитываемых членов при разложении в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки t целевой функции. К таким методам относят метод Рунге-Кутты. Многоточечные методы для продвижения по траектории КА учитывают не только значения параметров движения КА и производных от них в текущей точке, но и аналогичные значения в нескольких предыдущих точках траектории. К таким методам можно отнести основной из применяемых на практике численных методов интегрирования СДУ движения КА, обеспечивающий требуемую точность и оперативность расчета параметров движения КА, комбинированный метод Рунге-Кутты-Адамса [1].

Сущность метода заключается в следующем. Численное решение СДУ движения КА состоит в определении значений вектора Y_k, удовлетворяющего ей и заданным начальным условиям Y_0, для некоторых фиксированных значений времени t_k, где $k = 1,2,...,s$.

Расчет вектора Y_{k+1} по известному его значению Y_k и значениям $\dot{Y}_{k-p}$ производится по ординатным формулам Адамса 7-го порядка [1]:

– для скоростей ($j = 1,2,3$):

$$Y^{*}{}_{j,k+1} = Y_{j,k} + h_t \sum_{p=0}^{7} A_p \dot{Y}_{j,k-p}, \tag{7}$$

– для координат ($j = 4,5,6$):

$$Y^{*}{}_{j,k+1} = Y_{j,k} + h_t \sum_{p=0}^{7} A_p \dot{Y}_{j,k-p} + k_1 \Delta^7 \dot{Y}_{j,k}, \tag{8}$$

где A_p – вычисляемые коэффициенты формулы предиктора; h_t – шаг интегрирования; k_1 – корректирующий коэффициент для формул предиктора; Δ^7 – центральная разность 7-го порядка. После чего решение уточняется с помощью интерполяционных формул:

– для скоростей ($j = 1,2,3$):

$$Y_{j,k+1} = Y_{j,k} + h_t \sum_{p=0}^{7} B_p \dot{Y}_{j,k+1-p}, \tag{9}$$

– для координат ($j = 4,5,6$):

$$Y_{j,k+1} = Y_{j,k} + h_t \sum_{p=0}^{7} B_{p+1} \dot{Y}_{j,k-p} + B_0 \dot{Y}_{j,k+1} + k_2 \Delta^7 \dot{Y}_{j,k}, \quad (10)$$

где B_p – вычисляемые коэффициенты формулы корректора; k_2 – корректирующий коэффициент для формул корректора.

Значения параметров движения в разгонных узлах рассчитывается с использованием метода Рунге-Кутты.

В режиме интегрирования с автоматическим выбором шага на каждом шаге интегрирования вычисляются разности:

$$\delta Y_{j,k+1} = Y^*_{j,k+1} - Y_{j,k+1}, \quad (11)$$

где $Y^*_{j,k+1}, Y_{j,k+1}$ – значения искомых функций, вычисленных по формулам предиктора и корректора. Если выполняются условия:

$$\varepsilon_{1,j} \le \left| \delta Y_{j,k+1} \right| \le \varepsilon_{2,j},$$

то шаг интегрирования не меняется. При невыполнении хотя бы одного из условий производится увеличение или уменьшение шага интегрирования в два раза. В первом случае $\left| \delta Y_{j,k+1} \right| < \varepsilon_{1,j}$ для всех j интегрирование с шагом h_t производится до накопления необходимого числа разгонных точек для дальнейшего интегрирования с удвоенным шагом. Во втором случае, при $\left| \delta Y_{j,k+1} \right| > \varepsilon_{2,j}$ хотя бы для одного значения j путем интерполирования определяются значения правых частей СДУ движения КА для моментов времени (t_{k-1}/2h_t), (t_{k-3}/2h_t),...,(t_{k-7}/2h_t). После этого интегрирование продолжается с шагом, равным *1/2*h_t. Значение величин $\varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}$ выбирают экспериментально на основании анализа результатов сравнительных оценочных расчетов, исходя из требований к точности прогнозирования параметров движения КА. Шаг интегрирования h_t и характер его изменения задаются, исходя из требований к точности решения задачи.

Для интерполяции параметров движения КА на момент времени, лежащий внутри шага интегрирования, используются формулы, полученные интегрированием соответствующих интерполяционных формул Лагранжа. Аргументом для интерполяции служит величина ϕ, которая называется аргументом интерполяции. Параметры движения КА на момент времени t' получают с использованием соотношений [1]:

$$Y_j(t') = Y_j(t_k) + h_t \sum_{i=k-1}^{m+1} f_{j,i}\psi_i, \qquad (12)$$

где $k = 1\ldots m+1$, $j = 1,2,\ldots,6$;

для всех k > 1 – $\psi_i = \sum_{l=1}^{m} \beta_{il}\phi^{l+1}$,

а для всех k = 1 $\psi_i = \sum_{l=1}^{m+1} \beta_{il}\phi^{l}$,

$$\phi = \frac{t' - t_k}{h_t},$$

где β_{il} – коэффициенты проинтегрированных интерполяционных формул Лагранжа для m+1 узловой точки.

Результатом работы ММД являются параметры движения КА в одной или нескольких заданных СК.

Использованные источники:

1. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики / Т.В. Бордовицына. – М.: Наука, Главной редакции. физико-математической литераратуры, 1984. – 136 с.
2. Бордовицына. Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы: Учеб. пособие/ Т.В. Бордовицына, В.А. Авдюшев. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – 178 с.

3. Крылов В.И. Координатно-временные преобразования в геодезии : учеб. пособие / В.И. Крылов. – М.: Изд-во МИИГАиК, 2014. – 114 с.
4. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11): справочный документ / Научно-исследовательский центр топогеодезического и навигационного обеспечения «27 ЦНИИ» Минобороны России – М.: Военно – топогр. Упр. ГШ ВС РФ, 2014. – 52 с.