

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ

***Аннотация:** Статья посвящена описанию параметров движения космического аппарата. В ней рассказывается какие задачи решает данная модель. Разбор методов решения поставленной задачи. Также, идет повествование о влиянии внешних факторов на решение.*

***Ключевые слова:** параметры движения, поставленные задачи, внешние факторы, космический аппарат, методы решения.*

***Annotation:** The article is devoted to the description of the parameters of the spacecraft motion. It describes what tasks this model solves. Analysis of methods for solving the problem. Also, there is a story about the influence of external factors on the decision.*

***Key words:** motion parameters, assigned tasks, external factors, spacecraft, solution methods.*

Определение начальных условий движения, баллистического коэффициента, параметров управления движением КА производится по навигационным измерениям средств НКУ (измерениям дальности и радиальной скорости), АПСН (приращениям за заданный интервал разностей псевдодальностей до двух НКА), а также по векторам состояния, полученным на борту КА по данным АПСН. Начальные условия КА уточняются по результатам групповой обработки сеансов измерений на заданном мерном

интервале методом наименьших квадратов, обеспечивающим минимум дисперсии оценок уточняемых параметров на множестве всех линейных несмещенных оценок.

Программа построена на основе унифицированных базовых элементов комплекса:

- унифицированной модели движения центра масс КА;
- унифицированной модели расчета математического аналога измеряемого параметра;
- библиотеки стандартных подпрограмм комплекса.

Программа состоит из следующих модулей:

- блока формирования задания на решение – параметризации;
- блока формирования системы линейных уравнений и оценки точности сеансов измерений;
- блока решения системы уравнений;
- блока проверки выполнения условий сходимости и формирования новой итерации или завершения процесса сходимости и записи результатов уточнения параметров модели движения КА в БД.

– Блок параметризации предназначен для формирования рабочих структур и ключевых параметров, необходимых для реализации вычислительного процесса. Блок позволяет:

- формировать задание на расчет по объектам уточнения (задавать номер КА, номер НУ, момент уточнения НУ, номер ЛШС, состав уточняемых параметров);
- формировать выборку измерений, берущихся в обработку;
- выбирать режимы расчета и записи результатов решения.

Рассмотрим формирование системы уравнений и оценка точности измерения.

Навигационные измерения (дальность, радиальная скорость) функционально связаны с текущими параметрами движения, зависимостью вида:

$$f(q) = D, \quad (1)$$

где D – вектор измеряемых параметров,

q – вектор текущих параметров движения КА.

Текущие параметры движения, в свою очередь, однозначно определяются:

– константами модели движения (начальными условиями (НУ) движения – координатными и скоростными параметрами движения КА на начальный момент времени);

– параметрами модели движения (коэффициентами разложения геопотенциала, коэффициентом светового давления и др.).

Для реализованной в дискретные моменты времени t_i , $i=1,2,\dots,m$ программы измерений расчетный аналог измеряемого параметра можно представить в виде:

$$d_i = f(q(q_0, t_i)) = f_i(q_0), \quad (2)$$

где d_i – расчетное значение измеряемого параметра в момент времени t_i , $i=1,m$

q – текущие параметры движения КА,

q_0 – константы модели движения, уточняемые по измерениям (вектор размерности n).

Тогда функциональную связь измеренных и расчетных параметров можно представить в виде системы нелинейных уравнений:

$$F(q_0) = D. \quad (3)$$

Формирование системы, как нормальных, так и условных линейных уравнений производится в соответствии с методом наименьших квадратов.

Оценка вектора q_0 ищется из условия минимума функционала:

$$\mathcal{G} = (D - F(q_0))^T B (D - F(q_0)), \quad (4)$$

т.е. минимума суммы квадратов взвешенных невязок.

Система является избыточной относительно вектора q_0 и из-за погрешностей измерений становится несовместной, т.е. нельзя найти такой вектор q_0 , который удовлетворял бы всем условиям. Речь может идти лишь о нахождении такого вектора q_0 , который является лучшим приближением в смысле выбранного критерия.

В соответствии с методом Ньютона для нелинейных уравнений решение ищется путем построения последовательности q_0^i , сходящейся к стационарной точке q_0^* . На каждой i -й итерации формируется и решается система линейных уравнений [2]:

$$F(q_0^{i-1}) - D + \frac{\partial F(q_0^{i-1})}{\partial q_0^{i-1}} (q_0^i - q_0^{i-1}) = 0. \quad (5)$$

Обозначим $F(q_0^{i-1}) - D = b_{[m,1]}$ – вектор невязок;

$\frac{\partial F(q_0^{i-1})}{\partial q_0^{i-1}} = A_{[m,n]}$ – матрица системы линейных уравнений;

$(q_0^i - q_0^{i-1}) = x_{[n,1]}$ – вектор искомых поправок.

Поскольку при решении используются измеряемые параметры различных типов (прямоугольные координаты и проекции скорости), возникает необходимость использования специальной меры относительной точности этих измерений – веса измерения:

$$b_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad (6)$$

где σ_0 – СКО измерения, вес которого равен единице,

σ_i – СКО i -го измерения.

В блоке формирования системы линейных уравнений реализованы возможности построения:

1) условной системы уравнений – эквивалентной исходной системе $B^{1/2}Ax=B^{1/2}b$ – с верхней треугольной матрицей размерности $n \times n$. Для ее построения используется QR-алгоритм ортогонального разложения матриц, основанный на ортогональных преобразованиях Хаусхолдера и приводящий левую часть системы условных уравнений к виду [2]:

$$QB^{1/2}A = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где R – некоторые подматрицы,

Q – рассчитываемая ортогональная матрица,

B – матрица весов измерений,

при этом правая часть системы условных уравнений будет иметь вид:

$$QB^{1/2}b = \begin{bmatrix} g \\ s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где g, s – подвекторы вектора правой части;

2) нормальной системы уравнений – вида $ATVAx=ATVb$ – с симметричной матрицей $ATVA$, которая ортогональными преобразованиями Хаусхолдера приводится к верхнему треугольному виду.[6]

Необходимо отметить, что измерения средств НКУ и АПСН считаются некоррелированными и неравноточными, поэтому матрица весов для них является диагональной. Вектора АПСН при формировании системы уравнений обрабатываются пообсервационно, т.е. шестерками X, Y, Z, V_x, V_y, V_z . Матрица веса для вектора АПСН в обсервации является недиагональной и симметричной и рассчитывается по специальной методике при обработке и записи в БД векторов АПСН в виде измерений.

Для формирования как условной, так и нормальной системы уравнений вычисляется расчетный аналог измеряемого параметра и частные производные от измеряемых параметров по уточняемым.

Для расчета частных производных от измеряемых d_i параметров по определяемым параметрам q_0 используется выражение [3]:

$$\frac{\partial d_i}{\partial q_0} = \frac{\partial d_i}{\partial q(t_i)} \frac{\partial q(t_i)}{\partial q_0}, \quad (9)$$

где $\frac{\partial q(t_i)}{\partial q_0}$ – матрица частных производных от текущих параметров движения по уточняемым – матрица изохронных частных производных, ($i=1,m$),

$\frac{\partial d_i}{\partial q(t_i)}$ – матрица производных от измеряемых параметров по текущим параметрам движения КА, ($i=1,m$).

Изохронные частные производные определяются методом конечных разностей [1]:

$$\frac{\partial q(t_j)}{\partial q_{0i}} = \frac{q(t_j, q_{0i} + \Delta q_{0i}) - q(t_j, q_{0i})}{\Delta q_{0i}}, \quad (10)$$

где q_{0i} – i -я составляющая вектора q_0 ,

Δq_{0i} – возмущения i -ой составляющей вектора q_0 .

Численные значения приращений для расчета частных производных по каждому уточняемому параметру формируются в базе данных с помощью программы ведения исходных данных по уточняемым параметрам. Для уточнения баллистического коэффициента КА в ЛШС, заданной в начальных условиях движения, и в ЛШС для расчета частных производных от измеряемых параметров по уточняемым должна быть включена модель атмосферы.

Необходимо отметить, что система условных уравнений имеет преимущество перед системой нормальных уравнений в том, что ее матрица лучше обусловлена. Между числами обусловленности нормальной и условной систем справедливо соотношение:

$$\text{cond}(A^T A) = (\text{cond}(A))^2, \quad (11)$$

Поэтому в случае плохой обусловленности задачи определения вектора НУ целесообразно переходить к формированию именно системы условных уравнений.

Элементы матрицы системы линейных уравнений формируются только для измерений, прошедших фильтр отбраковки и включенных в обрабатываемую выборку – которые не являются «аномальными», т.е. удовлетворяют следующему условию [4]:

$$|\Delta d_i| < \Delta d_{\text{дон}} = |\Delta d_{\text{ср}}| + 3\sigma_{q_i}, \quad (12)$$

где $\Delta d_{\text{ср}}$ – среднее отклонение ошибок измерений на сеансе,

σ_{q_i} – среднее квадратическое отклонение ошибок измерений на сеансе,

$\Delta d_{\text{дон}}$ – допуск на измеряемый параметр.

Эти величины рассчитываются по результатам предыдущего сближения в соответствии со следующими выражениями [1]:

$$\begin{aligned} \Delta d_{\text{ср}} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta d_i ; \\ \sigma_{q_i} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta d_i - \Delta d_{\text{ср}})^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где N – количество вошедших в обработку измерений.

На каждой итерации вычисляются следующие статистические характеристики: количество вошедших N в обработку измерений из каждого сеанса измерений, среднее значение и среднее квадратическое отклонение ошибок измерений на сеансе, интегральное среднее значение и интегральное среднее квадратическое отклонение по каждому измеряемому параметру по всей выборке, СКО единицы веса измерения, а также общее количество измерений вошедших в обработку. Размерность, в которой выдаются средние значения и средние квадратические отклонения ошибок измерений в сеансе и

группе сеансов, может устанавливаться программой обслуживания измеряемых параметров и хранится в БД.

Рассмотрим решение системы уравнений.

Система условных уравнений, матрица которой приведена к верхнему треугольному виду, решается путем обратной подстановки. В случае плохой обусловленности системы уравнений (минимальное сингулярное число меньше

10-12) задача уточнения не будет решена и будут выданы нулевые поправки к исходным НУ движения КА.

Рассмотрим формирование новой итерации или завершение решения.

Блок формирования новой итерации предназначен для формирования уточненных параметров движения КА, выдачи интегральных оценок, контроля сходимости и изменения ручных и автоматизированных режимов решения.

Поскольку соотношение является системой нелинейных уравнений, то искомая оценка вектора q_0^* ищется итерационным путем:

$$q_0^* = q_0 + \sum_{i=1}^k \Delta q_0^i, \quad (14)$$

где k – количество итераций до достижения условия сходимости.

В программе реализованы следующие условия сходимости итерационного процесса по значению поправок – $\nabla q_0^i = |\Delta q_0^i - \Delta q_0^{i-1}|$ при условии сходимости в конечных допусках на измеряемые параметры.

Численные значения критериев сходимости по каждому уточняемому параметру формируются в базе данных программой ведения исходных данных по уточняемому параметрам.

При формировании новой итерации по значениям интегральных оценок для каждого типа измеряемого параметра рассчитываются новые допуски – как статистическая оценка предельной ошибки совокупности измерений в предположении их Гауссовского распределения с вероятностью попадания в

интервал 0.990. Кроме того, при расчете допусков на итерации учитывается вновь рассчитанное значение дисперсии единицы веса измерения – σ_0 .

При задании допусков в ручном режиме формируется запрос на ввод их значений оператором.

Теперь перейдём к рассмотрению вопроса формирования и записи уточненных начальных условий движения КА в базу данных

Блок формирования и записи уточненных параметров движения КА в базу данных предназначен для визуального контроля и записи результатов решения (начальных условий движения КА) в базу данных в ручном и автоматическом режимах.

По окончании расчета в БД записываются уточненные НУ движения КА в прямоугольной абсолютной системе координат. Перед записью в БД в уточненных НУ устанавливается тип НУ – «10 – уточненные НУ». Начальные условия могут быть записаны в БД с последним номером и нулевым модификатором НУ или с тем же номером, что и исходные НУ, но с последним модификатором НУ.

При необходимости имеется возможность ручной коррекции ключевых параметров (номер, тип, модификатор, номер БЦ) уточненных начальных условий перед записью в базу данных.

Общая методика уточнения любых параметров моделей описана выше. Среди особенностей необходимо отметить, что программа позволяет уточнять параметры модели движения КА по запросным измерениям средств НКУ, беззапросным измерениям АПСН, бортовым векторам БКУ, а также при одновременном использовании указанных видов измерений.

Программа уточнения параметров включения двигательной установки КА позволяет уточнять поправки к номинальным параметрам включения ДУ КА при наличии измерений до и после включения. Для уточнения параметров работы ДУ необходимо выбрать НУ движения КА, в которых указан номер циклограммы работы ДУ и логическая шкала сил, учитывающую отработку

тяги ДУ при моделировании движения КА. Учет тяги ДУ должен быть и в ЛШС для расчета частных производных от измеряемых параметров по уточняемым. Программа позволяет уточнять:

- поправку к номинальному времени включения ДУ;
- поправку к номинальной длительности включения;
- поправку к номинальному значению тяги ДУ (линейно зависима с поправкой к длительности включения ДУ величина);
- поправки к номинальным углам ориентации ДУ в пространстве, а именно, к начальному углу направления вектора тяги по тангажу ϑ и скорости изменения направления вектора тяги по тангажу $\dot{\vartheta}$, а также к начальному углу направления вектора тяги по рысканию ψ , скорость изменения направления вектора тяги по рысканию $\dot{\psi}$.

Выбор уточняемых параметров производится с учетом ограничений, обусловленных объемом имеющейся выборки измерений, а также взаимной линейной зависимостью некоторых параметров (например, тяги и длительности работы ДУ и т. п.).

В результате уточнения в БД будут сформированы НУ, в расширениях которых находятся поправки к номинальным значениям параметров работы ДУ. Эти поправки будут учитываться при моделировании движения КА с отработкой включения ДУ от данных НУ.

Использованные источники:

1. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики / Т.В. Бордовицына. – М.: Наука, Главной редакции физико-математической литературы, 1984. – 136 с.

2. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы: Учеб. пособие/ Т.В. Бордовицына, В.А. Авдюшев. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – 178 с.

3. Крылов В.И. Координатно-временные преобразования в геодезии: учеб. пособие / В.И. Крылов. – М.: Изд-во МИИГАиК, 2014. – 114 с.

4. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11): справочный документ / Научно-исследовательский центр топогеодезического и навигационного обеспечения «27 ЦНИИ» Минобороны России – М.: Военно – топогр. Упр. ГШ ВС РФ, 2014. – 52 с.