Клименко И.И.,
учитель математики
ОГБОУ «Лицей №9 г. Белгорода» Белгородской области
г. Белгород
Петрова Е.А.,
обучающаяся 9Б класса
ОГБОУ «Лицей №9 г. Белгорода» Белгородской области
г. Белгород

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Аннотация: *статья посвящена изучению методам решения уравнений четвертой степени, их применению на различных примерах.*

Ключевые слова: *уравнение, степень, Кардано, способы.*

Annotation: *the article is devoted to the study of methods for solving equations of the fourth degree, their application to various examples.*

Key words: *equation, degree, Cardano, ways.*

Получение решения уравнения четвёртой степени приписывается итальянскому математику Лодовико Феррари. Свою работу Феррари мог опубликовать уже в 1540 году, но не сделал этого из-за того, что у него отсутствовало решение кубического уравнения, на которое опиралась его работа. Методы решения уравнений четвёртой степени связаны с методами решения уравнений третьей степени, над которыми работали многие математики, жившие в начале XVI века. Значительные продвижения были сделаны итальянским математиком Джероламо Кардано, который в результате своей работы открыл комплексные числа, стал автором первых трудов по теории вероятностей и изобретателем карданного вала, но так и не смог найти методы решений кубических уравнений. Позже он познакомился с Никколо

Тартальей, который умел решать кубические уравнения и пользовался этим при участии в «математических дуэлях», данное умение давало ему немалое преимущество в «битвах». Кардано получил от него секрет решения этих уравнений, обещав нигде его не публиковать. В 1543 году Кардано узнал, что Сципион Дель Ферро также решил кубическое уравнение, но раньше и независимо от Тартальи. В 1545 году формулы Сципиона Дель Ферро были опубликовано Кардано в трактате «Высокое искусство», в котором он упомянул обоих математиков, решивших кубическое уравнение. Помимо открытий Дель Ферро, в трактате были опубликованы методы решения уравнений четвёртой степени, авторство которых принадлежит ученику Кардано – Лодовико Феррари. Факт публикации не понравился Тартале, из-за чего он был обижен и доставил немало неприятностей Кардано, который, в итоге, попал на несколько месяцев за решётку и лишился профессорского звания.

1. Решение двучленного уравнения четвёртой степени

Этот тип уравнения четвёртой степени является простейшим, само уравнение имеет вид Аx^4+В=0. Данное уравнение четвёртой степени решается с использованием формул сокращённого умножения.

$$Ax^4 + B = 0$$

$$x^4 + \frac{B}{A} = 0$$

$$x^4 + 2\sqrt{\frac{B}{A}}x^2 + \frac{B}{A} - 2\sqrt{\frac{B}{A}}x^2 = 0$$

$$\left(x^2 + \sqrt{\frac{B}{A}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{B}{A}}x^2 = 0$$

$$\left(x^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{B}{A}}x + \sqrt{\frac{B}{A}}\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{B}{A}}x + \sqrt{\frac{B}{A}}\right) = 0$$

2. Решение возвратного уравнения четвёртой степени

Уравнение вида $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$ называют возвратным уравнением четвертой степени.

Мы можем проверить, что x=0 не является корнем данного уравнения:

$A \cdot 0^4 + B \cdot 0^3 + C \cdot 0^2 + B \cdot 0 + A = A \neq 0$

Поэтому можно разделить на x^2 обе части уравнения:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$$
$$Ax^2 + Bx + C + \frac{B}{x} + \frac{A}{x^2} = 0$$
$$Ax^2 + \frac{A}{x^2} + Bx + \frac{B}{x} + C = 0$$
$$A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x + \frac{1}{x}\right) + C = 0$$

Введём новую переменную:

$$x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Произведём замену переменных:

$$A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x + \frac{1}{x}\right) + C = 0$$
$$A\left(y^2 - 2\right) + By + C = 0$$
$$Ay^2 + By + C - 2A = 0$$

Проделав данные действия, из возвратного уравнения четвёртой степени мы получаем квадратное уравнение.

3. Решение биквадратного уравнения

Уравнение четвертой степени вида $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$ называют биквадратным уравнением.

Для решения данных уравнений необходимо ввести новую переменную, после замены переменных, мы получим квадратное уравнение, которые решим с помощью нахождения дискриминанта.

4. Решение уравнения четвёртой степени с помощью метода Феррари

С помощью метода Феррари мы можем решить только приведённое уравнение четвёртой степени, то есть то уравнение, в котором старший коэффициент равен единице:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{1}$$

Решение будет состоять из двух этапов, для того чтобы не запутаться при решении, мы пронумеруем каждый шаг.

Первый этап

Приведём уравнение (1) к уравнению четвёртой степени, в котором отсутствует член с третьей степенью неизвестного. Для этого нужно проделать следующие действия:

Введём переменную y

Произведём замену: $x = y - \frac{a}{4}$, после этого уравнение примет следующий вид:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \left(y - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(y - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(y - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d =$$
$$= y^4 - 4y^3 \cdot \frac{a}{4} + 6y^2 \cdot \frac{a^2}{16} - 4y \cdot \frac{a^3}{64} + \frac{a^4}{256} + a\left(y^3 - 3y^2 \cdot \frac{a}{4} + 3y \cdot \frac{a^2}{16} - \frac{a^3}{64}\right) +$$
$$+ b\left(y^2 - 2y \cdot \frac{a}{4} + \frac{a^2}{16}\right) + cy - \frac{ca}{4} + d =$$
$$= y^4 + y^2\left(b - \frac{3a^2}{8}\right) + y\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right) - \frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ca}{4} + d. \tag{2}$$

После упрощения мы получим следующее уравнение:

$$y^4 + y^2\left(b - \frac{3a^2}{8}\right) + y\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right) - \frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ca}{4} + d = 0. \tag{3}$$

Теперь необходимо ввести обозначения

$$p = b - \frac{3a^2}{8}, \qquad q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c, \qquad r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2 b}{16} - \frac{ca}{4} + d,$$

Где *p, q, r* – вещественные числа, то есть вместе взятые множества рациональных и иррациональных чисел.

После ввода обозначений уравнение примет следующий вид:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \qquad (4)$$

На данном шаге первый этап заканчивается.

Второй этап

Решим полученное уравнение, разложив его на множители.

Но перед этим нужно проделать следующие операции над уравнением:

Добавим и вычтем в уравнение выражение $2sy^2 + s^2$, где s – некоторое число, его значение мы найдём позже. Добавив и вычтя данное выражение в уравнение *(4)* мы получим следующие уравнение:

$$y^4 + py^2 + qy + r = y^4 + 2sy^2 + s^2 + (p-2s)y^2 + qy + r - s^2 =$$

$$= (y^2 + s)^2 + (p-2s)\left(y^2 + 2\cdot\frac{qy}{2(p-2s)}\right) + r - s^2 =$$

$$= (y^2 + s)^2 + (p-2s)\left(y^2 + 2\cdot\frac{qy}{2(p-2s)} + \frac{q^2}{4(p-2s)^2}\right) + r - s^2 - \frac{q^2}{4(p-2s)} =$$

$$= (y^2 + s)^2 + (p-2s)\left(y + \frac{q}{2(p-2s)}\right)^2 + r - s^2 - \frac{q^2}{4(p-2s)} \qquad (5)$$

В итоге мы получим следующее уравнение:

$$(y^2 + s)^2 + (p-2s)\left(y + \frac{q}{2(p-2s)}\right)^2 + r - s^2 - \frac{q^2}{4(p-2s)} = 0. \qquad (6)$$

Если выбрать число *s* так, чтобы оно являлось каким-нибудь решением уравнения

$$r-s^2-\frac{q^2}{4(p-2s)}=0,$$

то уравнение *(6)* примет следующий вид:

$$\left(y^2+s\right)^2+(p-2s)\left(y+\frac{q}{2(p-2s)}\right)^2=0. \qquad (7)$$

Раскрываем скобки:

$$2s^3-ps^2-2rs+rp-\frac{q^2}{4}=0. \qquad (8)$$

Проделав данные действия, мы получаем кубическое уравнение *(8)*, которое называют *кубической резольвентой* уравнения четвёртой степени. Так как мы уже нашли решение резольвенты в пункте *(7)*, мы можем разложить уравнение на множители, применив формулу разности квадратов:

$$\left(y^2+s\right)^2+(p-2s)\left(y+\frac{q}{2(p-2s)}\right)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(y^2+s\right)^2-(2s-p)\left(y-\frac{q}{2(2s-p)}\right)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(y^2+s\right)^2-\left(y\sqrt{2s-p}-\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}\right)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(y^2-y\sqrt{2s-p}+\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}+s\right)\left(y^2+y\sqrt{2s-p}-\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}+s\right)=0 \qquad (9)$$

Далее необходимо решить следующие квадратные уравнения:

$$y^2-y\sqrt{2s-p}+\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}+s=0, \qquad (10)$$

$$y^2+y\sqrt{2s-p}-\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}+s=0. \qquad (11)$$

Литература:

1. Бочкарев В.А., Орлов А.И., Внеклассная работа по математике. // Москва: Изд-во Глобус, 2021. – 234 с.
2. Данилов А.А., Математический цветник: Методическое пособие // – М.: ТЦ Сфера, 2020. – 64 с.
3. Краткий очерк истории математики: Методический сборник // М.: Народное образование, 2020.