УДК 372.851

Субхангулова Р.Р., студент магистратуры
факультет математики и информационных технологий
Республика Башкортостан, г. Салават
Научный руководитель:
Михайлов Павел Никонович,
доктор физико-математических наук, профессор

СИСТЕМА КЛЮЧЕВЫХ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Аннотация: *в статье рассматриваются способы подготовки учащихся к ЕГЭ по геометрии. Дан анализ известных пособий по подготовке ЕГЭ. Особое внимание уделяется системе ключевых задач. Приведены примеры ключевых задач, связанных с треугольником.*

Ключевые слова: *ЕГЭ, геометрия, ключевые задачи, треугольник.*

Annotation: *The article discusses how to prepare students for the exam in geometry. An analysis of the known manuals for the preparation of the exam. Special attention is paid to the system of key tasks. Examples of key tasks related to the triangle are given.*

Key words: *EGE, geometry, key tasks, triangle.*

Ежегодные отчёты ФИПИ по результатам проведения государственной итоговой аттестации в форматах ОГЭ и ЕГЭ отмечают низкую результативность решения геометрических задач [1]. Мало кто из школьников приступает к их выполнению, многие считают их нерешаемыми. Это говорит о серьёзных проблемах в преподавании геометрии в основной школе. Изучение геометрии в 7-11 классах имеет ряд особенностей: учащимся необходимо запоминать много фактов, требующих аккуратности в формулировках; осваивать математическую символику и язык; научится выполнять чертежи к задачам; делать выводы по определённым правилам; правильно оформлять решение задач, опираясь на определения и теоремы.

Одним из средств целенаправленной организации обучения является планомерное знакомство учащихся с системой задач ключевых задач. Это позволит отказаться от стихийности учебной деятельности ученика и перейти к её целенаправленной организации и планомерному формированию как того требует ФГОС ООО.

Зеленский А.С. в своей статье писал о проблемах преподавания геометрии в школах [2]: «Главное - отказ от обучения по принципу: «Эту задачу нужно решать так». Акцент делается на том, почему задачу нужно решать именно так, почему не проходит какой-то иной, на первый взгляд, более простой способ, зачем в решении столько, казалось бы, лишних условий».

Также эти проблемы рассматривал в своей статье Шарыгин И.Ф. [3]: «Процесс изучения Геометрии включает самые разнообразные виды деятельности. В том числе и даже в первую очередь — решение задач. Задача — это не только умения, это и элемент знания. Ученик должен ознакомиться с определенным набором достаточно трудных геометрических задач, освоить некоторые геометрические методы, научиться решать задачи, следуя известным образцам. Кстати, именно в этом и состоит, по сути, процесс обучения алгебре. Мы показываем ученику методы, приемы, сообщаем алгоритмы, которые трудно, почти невозможно найти самостоятельно. В Геометрии, в отличие от Алгебры, подобных алгоритмов, очень мало, почти нет. Почти каждая задача по Геометрии является нестандартной. Поэтому при обучении возрастает значение опорных задач, сообщающих полезный факт, либо иллюстрирующих метод или прием».

В методической литературе такой подход не нов. Так, в системе работы Р.Г. Хазанкина [4, с.44], как само изучение, так и повторение шло через систему ключевых задач.

Обсуждение принципов составления системы опорных задач по геометрии позволило бы, с одной стороны, учителям математики повысить свой профессиональный уровень, а с другой стороны, помочь ученикам эффективно повторить курс геометрии.

Для начала такой работы предлагается собственный подход при выборе ключевых задач.

Опорные задачи можно выделять и комбинируя различные методы. Рассмотрим треугольник.

Почему же треугольник? Поиск геометрического решения задачи можно вести в направлении рассмотрения фигур, свойства которых хорошо изучены. Одной из таких фигур, несомненно, и является треугольник. Верный и добрый помощник – треугольник – поистине вездесущ и порой незаменим в отыскании простых и ясных решений. Как писали в своей статье Суконник Я. и Горнштейн П.: «Позволим себе следующий совет: если вы испытываете затруднения в выборе правильного геометрического пути решения задачи, ищите треугольник! [5]»

Задача 1.

Дана прямоугольная трапеция, основания которой равны a и b ($a < b$). Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите радиусы этих окружностей.

Решение. Достроим данную трапецию $ABCD$ до треугольника (рис. 1). Пусть окружности, вписанные в трапеции $AEFD$ и $EBCF$, касаются EF в точках M и N, а радиусы их будут R и r соответственно. Поскольку данная трапеция — прямоугольная, $EM = R$, $EN = r$. Из равенства $KP = KQ$ легко вывести $EN = MF$. Значит, $EF = R+r$. Из подобия треугольников BKC, EKF и AKD получаем систему

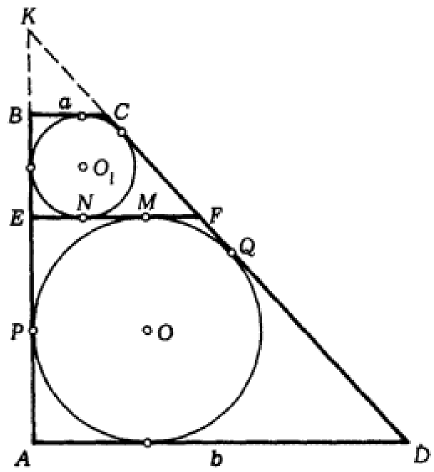


Рисунок 1.

$$\begin{cases} \dfrac{a}{R+r} = \dfrac{r}{R}, \\ \dfrac{R+r}{b} = \dfrac{r}{R} \end{cases}$$

из которой $R=\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b},}$ r = $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b},}$

Следующий пример иллюстрирует метод подобия.

Трапеция разделена на три трапеции прямыми, параллельными основаниям. Известно, что в каждую из трех получившихся трапеций можно вписать окружность. Найти радиус окружности, вписанной в среднюю трапецию, если радиусы окружностей, вписанных в две оставшиеся, равны R и r.

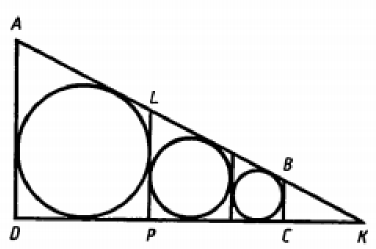
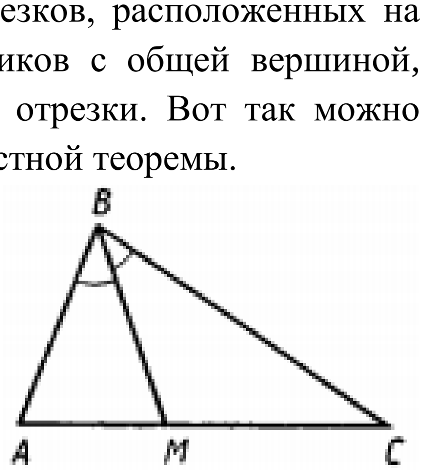


Рисунок 2.

Решение. Обозначения понятны из рисунка 2. Пусть радиус средней окружности равен x. Рассмотрим два подобных между собой треугольника *AKD* и *LKP*. Любые пары сходственных линейных величин в подобных треугольниках относятся одинаково. Паре окружностей с радиусом R и x в треугольнике *AKD* соответствует в треугольнике *LKP* пара окружностей с радиусами x и r. Следовательно, $\frac{x}{R} = \frac{r}{x}$, откуда $x=\sqrt{Rr}.$

Метод площадей имеет много разновидностей. Рассмотрим одну из них. Основная идея сводится к замене отношения отрезков, расположенных на одной прямой, отношением площадей треугольников с общей вершиной, основаниями которых являются рассматриваемые отрезки. Вот так можно показать, как работает этот прием, на примере известной теоремы.

Доказать, что биссектриса угла *B* треугольника *ABC* пересекает *AC* в такой точке *M*, для которой справедливо равенство *AM:MC=AB:BC.*



Доказательство (рис.3):

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MC}} = \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{0{,}5\ AB \cdot BM \cdot sin 0{,}5\ ABC}{0{,}5\ BM \cdot BC \cdot \sin 0{,}5\ ABC} = \frac{AB}{BC}.$$

Рисунок 3.

Задача.

Длины основания *CD*, диагонали *BD* и боковой стороны *AD* трапеции *ABCD* равны между собой и равны *p*. Длина боковой стороны ВС равна q. Найти длину диагонали АС.

Решение. В данной трапеции *ABCD* нелегко увидеть связь между искомой диагональю *AC* и другими отрезками. Если же. приняв во внимание, что точка *D* равноудалена от точек *A, B* и *C*, провести окружность *O (D, p)* и достроить данную трапецию до равнобедренной трапеции *ABCE*, из прямоугольного треугольника *ACE* легко найдем

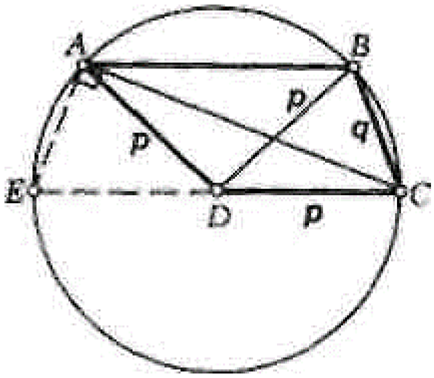


Рисунок 4.

AC =$\sqrt{4p^2 - p^2}$.

Для успешного решения задач планиметрии необходимо знать и правильно использовать: а) свойства медианы и высоты прямоугольного треугольника, проведенных к гипотенузе; б) формулы вычисления площади треугольника: $S = \frac{1}{2}a \cdot h;$ $S =\frac{1}{2}ab\, sinC;$ $S =\frac{1}{2}$ $(a + b + c)\cdot r$, где r — радиус вписанной окружности; $S =\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр; $S=\frac{abc}{4R}$, где R — радиус описанной окружности; в) свойство биссектрисы угла в треугольнике; г) теорему об отрезках касательных, проведенных из данной точки к данной окружности; д) теорему синусов и теорему косинусов; е) теорему о касательной и секущей; ж) теорему о нахождении вписанного угла, угла с вершиной внутри и вне круга, угла между касательной и хордой.

Так же повторяем параллелепипеды и другие фигуры. Такой подход является универсальным и позволяет сэкономить время на повторение геометрии.

Использованные источники:

1. Ященко И.В., Рослова Л.О., Высоцкий И.Р., Семенов А.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных

ошибок участников ЕГЭ 2018 года по математике: сайт Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений» (ФГБНУ «ФИПИ»). URL:http://www.fipi.ru/sites/default/files/document/1535625213/matematika_2018.pdf (дата обращения 04.01.2019).
2. Зеленский А.С. Проблемы преподавания математики В профильных классах, Фундаментальные исследования, 2008, № 5, с. 74.
3. Шарыгин И.Ф. Нужна ли школе 21-го века Геометрия? Матем. просв., 2004, выпуск 8, с. 37–52
4. Зильберберг Н.И. Урок математики. Подготовка и проведение. – М.: Просвещение, АО «Учебная литература», 1995. – 178 с.
5. Суконник Я., Горнштейн П. Геометрические решения геометрических задач. – Квант, 1979, выпуск 9, 38-43