Кузнецова Екатерина Сергеевна

Студентка 5 курса

факультет математики информатики и естественных наук

ИПИ им. П.П. Ершова филиал ТюмГу

Россия, г. Ишим

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ МЕТОДОМ РАЦИОНАЛИЗАЦИИ В 11 КЛАССЕ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ

Аннотация: *В статье рассмотрены решения показательных и логарифмических неравенств повышенной сложности методом рационализации при подготовке к ЕГЭ, который позволяет упростить их решения.*

Ключевые слова: *показательные неравенства, логарифмические неравенства, метод рационализации, неравенства повышенной сложности.*

Annotation: *The article considers solutions of exponential and logarithmic inequalities of increased complexity by the method of rationalization in preparation for the Unified State Exam, which makes it possible to simplify their solutions.*

Key words: *exponential inequalities, logarithmic inequalities, rationalization method, inequalities of increased complexity.*

Метод рационализации является одним из важнейших методов решения показательных и логарифмических неравенств необходимый для успешной сдачи Единого Государственного Экзамена по математике профильного уровня. В контрольно-измерительных материалах ЕГЭ профильного уровня, попадаются неравенства, вычисления которых занимает немалое количество времени и является большим, что повышает вероятность того, что может быть допущена ошибка, а так же которые с трудом поддаются решению привычными для школьников методами. Использование данного метода способствует избеганию сложностей, возникших при решении неравенств.

Суть метода рационализации заключается в том, что неравенства повышенной сложности сводятся к решению рациональных неравенств. То есть, сложное выражение F(x) заменяется на более простое G(x), при котором неравенство G(x)^0 равносильно F(x)^0 в области определения F(x).

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f, g, h – выражения с переменной, x, a – фиксированное число (a > 0, a ≠ 1).

Свойства метода рационализации. Таблица 1.

№	Выражение F	Выражение G
1.1 1.2 1.3	$\log_a f - \log_a g$ $\log_a f - 1$ $\log_a f$ (где f > 0;g > 0)	(a – 1)(f –g) (a – 1)(f –a) (a – 1)(f –1)
2.1 2.2 2.3	$\log_h f - \log_h g$ $\log_h f - 1$ $\log_h f$ (где h > 0; h ≠ 1; f > 0; g > 0)	(h – 1)(f –g) (h – 1)(f –h) (h – 1)(f –1)
3	$\log_f h - \log_g h$ (где h>0; f >0; g>0; f ≠ 1; g ≠ 1)	(f – 1)(g – 1)(h – 1)(g – f)
4.1 4.2	$h^f - h^g$ $h^f - 1$ (где h > 0; h ≠ 1)	(h – 1)(f –g) (h – 1)f
5 5.1	$f^h - g^h$ (где f >0; g>0; f ≠ 1; g ≠ 1) $\sqrt{f} - \sqrt{g}$ (где f ≥ 0;g ≥ 0)	(f – g)h (f – g)
6	| f | – | g |	(f – g)(f + g)

Рассмотрим решение показательных и логарифмических неравенств повышенной сложности из контрольно-измерительных материалов ЕГЭ методом рационализации.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{x+1}(x-1)\cdot\log_{x+1}(x+2)\leq 0$.

Решение: Определим область допустимых значений:

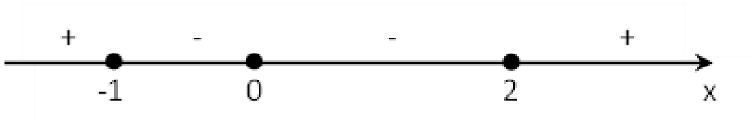
$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-2 \\ x>-1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$$

Применим свойства метода рационализации из Таблицы 1. Получим:

$$(x+1-1)(x-1-1)(x+1-1)(x+2-1)\leq 0$$

$$x(x-2)\cdot x(x+1)\leq 0$$

$$x^2(x-2)(x+1)\leq 0$$



Откуда: $-1\leq x\leq 2$

С учётом ОДЗ получаем ответ $1<x\leq 2$

Ответ: (1;2]

Пример 2. Решите неравенство $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\leq 2$.

Решение: Запишем неравенство в виде

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)-\log_{|x+2|}(x+2)^2\leq 0$$

Применив свойства метода рационализации, получим:

$$\begin{cases} (|x+2|-1)(4+7x-2x^2-x^2-4x-4)\leq 0 \\ 4+7x-2x^2>0 \\ x+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2-1)(x+2+1)(-3x^2+3x)\leq 0 \\ (x+0{,}5)(x-4)<0 \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+3)x(x-1) \geq 0 \\ (x+0{,}5)(x-4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-0{,}5; 0] \cup [1; 4)$$

Ответ: $(-0{,}5; 0] \cup [1; 4)$

Пример 3. Решите неравенство $4^{x+1} + 2^{x+1} - 1 > 0$.

Решение: Область определения неравенства: $4^{x+1} + 2^{x+1} - 1 > 0$.

Пусть $2^{x+1} = t$. Тогда:

$$\begin{cases} 2^{x+1} > 0 \\ t^2 + t - 1 > 0 \end{cases}$$

$$t > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad x > -2 + \log_2(\sqrt{5} - 1)$$

Применим метод рационализации неравенства:

$$(4^{x+1} + 2^{x+1} - 2)(x^2 - x) \geq 0$$

$$(2^{x+1} - 1)(2^{x+1} + 2)x(x-1) \geq 0$$

$$(2^{x+1} - 1)x(x-1) \geq 0$$

$$(x+1)x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq x \leq 0; x \geq 1$$

Ответ: $-1 \leq x \leq 0; x \geq 1$

Пример 4. Решите неравенство $(x+2)^{3-7x} \geq (x+2)^{6-5x}$

Решение: Определим область допустимых значений:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

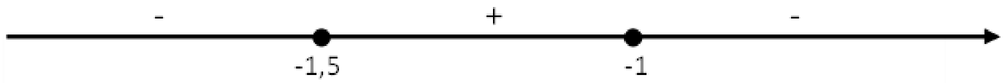
Воспользуемся методом рационализации:

$$(x + 2 - 1)((3 - 7x) - (6 - 5x)) \geq 0$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые.

$$(x+1)(-2x-3) \geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов:



Отсюда следует что: $x \in [-1{,}5;\ -1]$

Ответ: $x \in [-1{,}5;\ -1]$

Использованные источники:

1. Фазлеева Э.И. О применении метода рационализации при решении неравенств. [Электронный ресурс]. URL: https://kpfu.ru/staff_files/F1977879220/Metod_racionalizacii.pdf (дата обращения 24.05.2023).
2. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. [Электронный ресурс]. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=237 (дата обращения 24.05.2023).
3. SIGMA. Метод рационализации. [Электронный ресурс]. URL: https://sigma-center.ru/rationalization#poweriniquality (дата обращения 24.05.2023).