УДК 330.4

Галлямов А.А., кандидат экономических наук, доцент
доцент кафедры «Информационные технологии и прикладная математика»
Уфимский государственный нефтяной технический университет
Россия, г. Уфа
Абдуллин А.А.,
студент
1 курс, факультет «Уфимская высшая школа экономики и управления»
Уфимский государственный нефтяной технический университет
Россия, г. Москва

МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС

Аннотация: *Межотраслевой баланс — экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходованием продукции всех участвующих отраслей, необходимым для обеспечения этого выпуска.*

Ключевые слова: *Экономика, математика, межотраслевой баланс, математический метод решения экономической задачи.*

Annotation: *Intersectoral balance — is an economic and mathematical balance model that characterizes intersectoral production relationships in the country's economy. Characterizes the relationship between the output of products in one industry and the costs, expenditure of products of all participating industries necessary to ensure this output.*

Key words: *Economics, mathematics, intersectoral balance, mathematical method of solving an economic problem.*

Модель Леонтьева. Межотраслевой баланс.

Межотраслевой баланс представляет собой таблицу, характеризующую взаимосвязи между объектами экономической системы. Предполагается, что экономическая система состоит из P отраслей, каждая из которых производит некоторый однородный продукт, отличный от продуктов других отраслей. Для производства своего продукта отрасль нуждается в продукции других отраслей (в качестве сырья, ресурсов, полуфабрикатов и т.д.), поэтому каждая отрасль представлена в таблице дважды: в качестве производителя и в качестве потребителя продукции других отраслей.

Введем следующие обозначения. Пусть x_{ij} — затраты продукта i-й отрасли на производственные нужды j-й отрасли, x_i — валовой продукт i-й отрасли, y_i — конечный продукт (конечное потребление) i-й отрасли, v_j — условно-чистая продукция j-й отрасли за некоторый промежуток времени (год, квартал и т.д.). Перечисленные показатели приводятся в стоимостном выражении.

Общий вид межотраслевого баланса представим в виде таблицы (рис. 1).

Производство	Потребление				Конечное потребление Y_i	Валовой продукт X_i
	P_1	P_2	…	P_n		
P_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	x_1
P_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	x_2
…	…	…	…	…	…	…
P_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	x_n

Производство	Потребление				Конечное потребление Y_i	Валовой продукт X_i
	P_1	P_2	…	P_n		
Условно-чистая продукция V_j	v_1	v_2	…	v_n		
Валовой продукт X_j	x_1	x_2	…	x_n		

Рисунок 1. Таблица.

Таблица состоит из четырех квадрантов. Верхний левый квадрант характеризует Межотраслевые потоки продукции. Строки этого раздела показывают распределение продукции каждой отрасли на нужды других отраслей. Столбцы отражают структуру производственного потребления отраслей.

Правый верхний квадрант содержит два столбца: столбец Y_i содержит объемы конечного продукта отраслей (в его состав входят: продукция отрасли, предназначенная к потреблению в непроизводственной сфере (личное потребление), обеспечение общественных потребностей, возмещение выбытия основных фондов, экспортные поставки, накопление).

Столбец X_i содержит величины общего объема продукции отраслей, т.е. валовой продукт.

Нижний левый квадрант, кроме строки X_j содержит строку V_j величин условно-чистой продукции отраслей, включающих амортизационные отчисления, заработную плату и прибыль.

Важным свойством таблицы является то, что для любой строки с номером $i = \overline{1,n}$ справедливо соотношение баланса между производством и потреблением: $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$ означающее, что валовой продукт отрасли расходуется полностью — на производственное (промежуточное) и непроизводственное (конечное) потребление.

Аналогично, для любого столбца с номером $i = \overline{1,n}$ справедливо равенство $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j$. Равенство представляет стоимостную структуру продукта каждой отрасли. Оно показывает, что стоимость валовою продукта отрасли складывается из затрат других отраслей на его производство и стоимости условно-чистой продукции, не производящейся внутри производственной системы.

Отметим и еще одно важное соотношение межотраслевого баланса: суммарный конечный продукт равен суммарной условно-чистой продукции:

$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} v_j$ Построим математическую модель межотраслевого баланса. Предположим, что для выпуска некоторого объема

продукции x_{ij} необходимо затратить валовую продукцию j-й отрасли в количестве $a_{ij}x_j$, где a_{ij} — постоянный коэффициент, обусловленный существующими технологиями производства и определяемый, например, по данным отчетного баланса. Соотношение

$x_{ij} = a_{ij}x_j$ выражает условие линейной зависимости объема производства от издержек или линейности существующей технологии. Коэффициенты

$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$, где $i, j = \overline{1,n}$ называют коэффициентами прямых материальных затрат или технологическими коэффициентами.

Каждый коэффициент a_{ij} есть стоимость продукции i-й отрасли, вложенной в производство единицы продукции j-й отрасли в стоимостном выражении.

Матрицу $A = (a_{ij})$. $i, j = \overline{1,n}$ называют матрицей прямых материальных затрат. Технологические коэффициенты имеют следующие свойства:

$$0 \le a_{ij} < 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1; \; i, j = \overline{1,n}.$$

Используя соотношения составим линейную балансовую модель:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i$$

или в матричной форме:

$$\overline{x} - A\overline{x} = \overline{y},$$

где A — матрица коэффициентов прямых материальных затрат, E — единичная матрица порядка n, $\overline{y}$ — вектор конечного потребления, $\overline{x}$ — вектор валового выпуска. Полученную систему (11.7) называют моделью Леонтьева. В системе содержится 2n неизвестных в n линейных уравнениях. Если задать n из них, то система будет определенной. Поэтому задачи, решаемые с помощью балансовой модели, можно разделить на три группы.

1) По заданному вектору конечного потребления $\overline{y}$ найти вектор валового выпуска $\overline{x}$. Решение матричного уравнения относительно $\overline{x}$ имеет вид: $\overline{x} = (E - A)^{-1}\overline{y}$.

2) По заданному вектору валового выпуска $\overline{x}$ найти вектор конечного потребления $\overline{y}$. Решив матричное уравнение, относительно $\overline{y}$, получим:

$$\overline{y} = (E - A)\overline{x}$$

3) Смешанная задача: по некоторым заданным x_i и y_j найти соответствующие x_j и y_i.

Рассмотрим более подробно первую задачу. Она содержит основной вопрос межотраслевого анализа: каким должно быть валовое производство каждой отрасли, чтобы экономическая система в целом произвела заданное количество конечного продукта. Разрешимость уравнения в положительных числах зависит от свойства матрицы A, называемого продуктивностью матрицы.

Матрица A называется продуктивной, если существует вектор $\overline{x} \geq 0$ такой, что $\overline{x} > A\overline{x}$. Смысл последнего неравенства состоит в том, что затраты на выпуск продукта должны быть меньше стоимости самого продукта. Достаточным условием продуктивности матрицы является выполнение условий:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le 1 ; \; \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 ; \; i, j = \overline{1,n} .$$

Если матрица A — продуктивная, то для любого $\overline{y} \ge 0$ существует неотрицательное решение $\overline{x} \ge 0$ уравнения (11.7).

Для того, чтобы матрица A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная матрица

$$B = (E - A)^{-1}$$

Матрицу B называют матрицей полных материальных затрат или обратной матрицей Леонтьева. Таким образом, решение уравнения (11.7) относительно $\overline{x}$ можно найти по формуле:

$$\overline{x} = B\overline{y}$$

или в координатной форме

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \, , \; i = \overline{1,n} .$$

Пример решения задачи с МОБ

Используя данные отчетного баланса, постройте систему балансовых уравнений и найдите:

а) вектор валового продукта $\overline{x}$, если вектор конечного потребления

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix};$$

б) вектор конечного потребления $\overline{y}$, если вектор валового продукта

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Производство	Потребление		Конечное потребление Y_i	Валовой продукт X_i
	P_1	P_2		
P_1	4	0	6	10
P_2	1	8	7	16
Условно-чистая продукция V_j	5	8		
Валовой продукт X_j	10	16		

Решение:

Для построения балансовых уравнений найдем коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} по формуле:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{4}{10} = 0,4; \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{0}{16} = 0;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{8}{16} = 0,5.$$

Система балансовых уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - (0,4x_1 + 0 \cdot x_2) = y_1, \\ x_2 - (0,1x_1 + 0,5x_2) = y_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,6x_1 = y_1, \\ -0,1x_1 + 0,5x_2 = y_2. \end{cases}$$

а) При заданном

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

имеем:

$$\begin{cases} 0,6x_1 = 10, \\ -0,1x_1 + 0,5x_2 = 15. \end{cases}$$

Полученную систему линейных уравнений решим по формулам

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,6 & 0 \\ -0,1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,3; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 0,5 \end{vmatrix} = 5; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0,6 & 10 \\ -0,1 & 15 \end{vmatrix} = 10;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{0,3} = \frac{50}{3}; \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{0,3} = \frac{100}{3}.$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{50}{3} \\ \frac{100}{3} \end{pmatrix}.$$

б) При заданном

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}$$

система балансовых уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} y_1 = 0,6 \cdot 20, \\ y_2 = -0,1 \cdot 20 + 0,5 \cdot 25. \end{cases}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10,5 \end{pmatrix}.$$

Модель МОБ применяется для специального анализа макроэкономического равновесия трудовых ресурсов общества и объемов выпуска продукта, производства и распределения основных производственных фондов для других целей.

Межотраслевой баланс позволяет провести анализ взаимозависимости цен в макроэкономике, оценить материальные и трудовые издержки, определить добавленную стоимость.

Использованные источники:

1. Анализ и моделирование экономики на основе межотраслевого баланса [Текст]: монография / В.А. Ильин, Т.В. Ускова, Е.В. Лукин, С.А. Кожевников; под науч. рук. чл.-корр. РАН В.А. Ильина. – Вологда: ФГБУН ВолНЦ РАН, 2017. – 158 с.
2. Общие ресурсы по экономике и математике: сайт Людмилы Анатольевны Фирмаль. [Электронный ресурс]. URL: https://lfirmal.com/ekonomiko-matematicheskie-metody-zadachi/#Межотраслевой_баланс (дата обращения: 20.01.2023).