УДК 167

Новиков Н.Б.
Институт психологии РАН
Россия, г. Москва
Novikov N.B.
Institute of Psychology RAS
Russia, Moscow

СИЛА АНАЛОГИЙ. ТВОРЧЕСТВО АНРИ ПУАНКАРЕ

Аннотация: *В октябре 1873 года Анри Пуанкаре становится студентом политехнической школы (Франция), где на вступительных экзаменах набирает высший балл. По результатам учебы его принимают в Горную школу, наиболее авторитетное в то время специальное высшее учебное заведение, и там он в 1879 году защищает докторскую диссертацию. В научных спорах Пуанкаре был тверд, но неукоснительно корректен. Никогда не был замешан в скандалах, неоднократно добровольно уступал научный приоритет, даже если имел серьезные права на него. Прекрасно ориентируясь почти во всех областях математики, Пуанкаре внес важный вклад в каждую из них. Один современник назвал его «завоевателем», и, действительно, вся его научная деятельность – это расширение горизонтов наших знаний. Поражает количество результатов, полученных Пуанкаре посредством аналогии – универсального эвристического приема мышления. Можно сказать, что в любых обстоятельствах его мозг был нацелен на выявление скрытых связей между далекими идеями.*

Ключевые слова: *новые идеи, математические теории, обнаружение сходства, проведение аналогии.*

Abstract: *In October 1873, Henri Poincare became a student at the Polytechnic School (France), where he scored the highest score in the entrance*

exams. According to the results of his studies, he was admitted to the Mining School, the most authoritative specialized higher educational institution at that time, and there he defended his doctoral dissertation in 1879. In scientific disputes, Poincare was firm, but rigorously correct. He was never involved in scandals, repeatedly voluntarily conceded scientific priority, even if he had serious rights to it. Excellently oriented in almost all areas of mathematics, Poincare made important contributions to each of them. One contemporary called him a "conqueror", and, indeed, all his scientific activity is the expansion of the horizons of our knowledge. The number of results obtained by Poincare through analogy, a universal heuristic method of thinking, is striking. It can be said that in any circumstances his brain was aimed at revealing hidden connections between distant ideas.

Key words: *new ideas, mathematical theories, discovery of similarities, drawing analogies.*

1. Аналогия первая: создание теории автоморфных функций

Автоморфные функции – это математические функции, инвариантные относительно некоторой группы дробно-линейных подстановок (преобразований). Работу над изучением этих функций начал немецкий математик Лазарь Фукс (1833-1902), а завершил А.Пуанкаре, построивший законченную теорию данных функций, которые он называл «фуксовыми». Феликс Клейн (1849-1925) возражал против того, чтобы называть их «фуксовыми», и предложил термин «автоморфные». Открытия, сделанные А.Пуанкаре при исследовании автоморфных функций, специалисты считают вершиной всего развития теории аналитических функций комплексного переменного в XIX веке. Построив в 1880-х годах теорию данных функций, французский математик решил проблему униформизации алгебраических кривых: он показал, что любую алгебраическую кривую можно представить с помощью некоторой автоморфной функции. Тем самым А.Пуанкаре решил

22-ю проблему Д.Гильберта, сформулированную им в 1900 г. на Международном математическом конгрессе. Теория автоморфных функций нашла многообразные применения в самых различных отделах математики, в том числе в теории групп, алгебраической геометрии и теории чисел.

Как же А.Пуанкаре создал эту теорию? В начале мая 1880 г. он случайно прочитал статью Л.Фукса, посвященную автоморфным функциям. Эта статья «захватила его воображение», и уже в 1881-1882 гг. А.Пуанкаре опубликовал серию работ, содержащих анализ и дальнейшее развитие идей Л.Фукса. С этими статьями ознакомился Ф.Клейн, который начал переписываться со своим французским коллегой. Ф.Клейн решил вступить в своеобразное состязание с ним, изучая новый класс функций и сообщая о полученных результатах в письмах. Разумеется, выиграть это состязание он не мог, поскольку А.Пуанкаре, используя связи между далекими областями (разделами) математики, продвигался в построении новой теории быстрее, чем Ф.Клейн, сосредоточившийся на анализе частных случаев рассматриваемых функций. Соперничество с А.Пуанкаре негативно отразилось на здоровье автора знаменитой Эрлангенской программы.

С.Г.Гиндикин пишет об Ф.Клейне [1]: «Он начал переписку с Пуанкаре; они обменялись 26 письмами. Клейн, уже известный математик (хотя только на 5 лет старше Пуанкаре), выступает в роли очень тактичного учителя. Он знакомит Пуанкаре с теорией Римана, о которой тот не имел представления, но мгновенно усвоил. Клейн решается на соревнование с Пуанкаре: улучшает доказательство основного результата и намечает его обобщение. Эта история окончилась для Клейна печально: «Цена, которую мне пришлось заплатить за мои работы, была, во всяком случае, очень велика, так как мое здоровье оказалось совершенно расшатанным» [1, с.393-394].

Г.Фрейденталь в статье «Пуанкаре и теория автоморфных функций» [2] отмечает: «Клейн ошибался, сравнивая свое состязание со скачками, на которых то один, то другой вырывается вперед, - с самого начала Пуанкаре настолько вырвался вперед, что догнать его Клейн так и не смог» [2, с.695].

Ключевую роль в разработке А.Пуанкаре теории автоморфных функций сыграли три аналогии. Первая из них заключалась в том, что французский математик строил новую теорию по аналогии с теорией эллиптических функций, здание которой было воздвигнуто трудами Х.Абеля, К.Гаусса, К.Якоби и др.

Эта аналогия А.Пуанкаре рассматривается в книге «Математика XIX века: чебышевское направление в теории функций» [3]: «В основе подхода Пуанкаре лежит гениальная мысль, подобная той, которая в свое время пришла на ум Гауссу, Абелю и Якоби при введении ими эллиптических функций: вместо того, чтобы рассматривать слишком сложную функцию *u(z),* являющуюся решением уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\,\frac{dy}{dz} + q(z)u = 0$$

с рациональными (или шире – с алгебраическими) коэффициентами, обратить задачу – рассмотреть переменную z как функцию решения, при этом не одного u, но отношения u_1/u_2 двух линейно независимых решений u_1 u_2. Функция эта является однозначной и, как можно показать, инвариантной относительно некоторой группы дробно-линейных преобразований. Введенные таким образом функции (1881) составили новый класс трансцендентностей, изучение которых было с успехом начато самим Пуанкаре и Ф.Клейном, которые и заложили основы теории так называемых автоморфных функций – функций, инвариантных относительно некоторой группы дробно-линейных подстановок» [3, с.158].

Об этом же сообщается в книге «Математика XIX века: геометрия, теория аналитических функций» [4]: «…Пуанкаре рассматривал свою теорию как далеко идущий **аналог** теории эллиптических функций…» [4, с.245].

Наконец, можно обратиться к воспоминаниям самого А.Пуанкаре, который в книге «Наука и метод» [5] говорит об автоморфных функциях: «Я захотел представить эти функции в виде частного (отношения – Н.Н.Б.) двух рядов; это была вполне сознательная и обдуманная мысль; мною руководила **аналогия** с эллиптическими функциями. Я задал себе вопрос, каковы должны быть свойства этих рядов, если они существуют, и я пришел без труда к образованию рядов, названных мною тета-фуксовыми функциями» [5, с.313].

Вторая аналогия, позволившая французскому математику построить теорию автоморфных функций, состояла в том, что он обнаружил эквивалентность (изоморфизм) между преобразованиями, используемыми в этой теории, и преобразованиями, которые применяются в неевклидовой геометрии. Другими словами, А.Пуанкаре заметил сходство между математическими операциями, выполняемыми в теории автоморфных функций, и операциями, выполняемыми в геометрии Н.И.Лобачевского. Благодаря этому наблюдению открывались большие возможности. С одной стороны, методы геометрии Н.И.Лобачевского можно было перенести на автоморфные функции, а, с другой стороны, теория этих функций позволяла предложить новую интерпретацию неевклидовой геометрии. Когда итальянец Э.Бельтрами (1868) установил, что выведенные Фердинандом Миндингом (1837) формулы тригонометрии геодезических треугольников на поверхностях постоянной отрицательной кривизны аналогичны формулам геометрии Лобачевского, это был лишь первый шаг на пути понимания указанной геометрии. Выявленная А.Пуанкаре связь между построениями Лобачевского и теорией автоморфных функций оказалась более весомым вкладом в доказательство непротиворечивости геометрии, в которой отрицается постулат о параллельных линиях.

А.Пуанкаре обнаружил аналогию, о которой идет речь, во время геологической экскурсии, организованной Горным институтом, где он обучался. В книге «Наука и метод» [5] он подробно описывает обстоятельства своего «озарения»: «…Я покинул Кан, где я тогда жил, чтобы принять участие в геологической экскурсии, организованной Горным институтом. Среди дорожных перипетий я забыл о своих математических работах; по прибытии в Кутанс мы взяли омнибус для прогулки; и вот в тот момент, когда я заносил ногу на ступеньку омнибуса, мне пришла в голову идея – хотя мои предыдущие мысли не имели с нею ничего общего, - что те преобразования, которыми я воспользовался для определения фуксовых функций, тождественны с преобразованиями неевклидовой геометрии. Я не проверил этой идеи; для этого я не имел времени, так как, едва усевшись в омнибус, я возобновил начатый разговор, тем не менее, я сразу почувствовал полную уверенность в правильности идеи. Возвратясь в Кан, я сделал проверку; идея оказалась правильной» [5, с.313].

Аналогия П.Пуанкаре анализируется в статье В.В.Прасолова и А.Б.Скопенкова «Размышления о признании геометрии Лобачевского» [6]: «Одним из первых приложений геометрии Лобачевского к другим областям математики была теория автоморфных функций, разработанная Пуанкаре в 1881-84 годы [5]. В простейшем случае это функции комплексного переменного, определенные в верхней полуплоскости и инвариантные относительно некоторого множества дробно-линейных преобразований… Пуанкаре сначала выясняет, как устроены фундаментальные области таких преобразований, а затем строит сами функции с помощью рядов. Пуанкаре обнаруживает, что фундаментальные области заполняют верхнюю полуплоскость, причем их размеры уменьшаются при приближении к границе – вещественной прямой. Это напомнило ему геометрию Лобачевского, и неожиданно пришла идея, что эти преобразования совпадают с движениями неевклидовой геометрии. Правильность этой идеи Пуанкаре вскоре легко проверил. Пуанкаре отмечал, что геометрия Лобачевского служила ему в его исследованиях руководящей нитью…» [6, с.105].

Популярная литература изобилует описаниями, в которых момент осознания А.Пуанкаре эквивалентности между теорией автоморфных функций и геометрией Лобачевского буквальным образом мистифицируется (трактуется с привлечением ненаучных идей). Выдающийся отечественный математик Л.С.Понтрягин опроверг эти трактовки, указав, что французский математик, «занося свою ногу на ступеньку омнибуса», всего лишь выявил аналогию между разными разделами математики, а в дальнейшем использовал это наблюдение. Не считая нужным объяснять «озарение» А.Пуанкаре с помощью понятий подсознания и интуиции, Л.С.Понтрягин в книге «Жизнеописание» [7] подчеркивает: «На мой взгляд, имело место другое. В его уме были представления об обеих группах. Первая группа, связанная с автоморфной функцией, которую он искал, и вторая лежала в голове готовая – это группа преобразований в плоскости Лобачевского. Догадка или переход заключался в том, что группы эти одинаковы. Пуанкаре сразу уверовал в это и считал это плодом длительной подсознательной работы. В действительности же утверждение потребовало дальнейшей проверки и оказалось правильным» [7].

Третья аналогия, которая помогла А.Пуанкаре разработать теорию автоморфных функций, заключалась в том, что он обратил внимание на эквивалентность между этой теорией и теорией рациональных квадратичных форм от трех переменных. Последняя является частью арифметики (теории чисел). Будучи учеником Шарля Эрмита (1822-1901), который глубоко изучил эти квадратичные формы от трех переменных, называемые «тернарными», А.Пуанкаре заметил, что группа автоморфизмов тернарной квадратичной формы аналогична некоторой группе автоморфных (фуксовых) функций. Отсюда возникала возможность для разработки арифметической концепции автоморфных функций, что А.Пуанкаре и сделал.

Э.Б.Винберг в заметке «О фуксовых функциях» [8] сообщает: «Рассмотрение автоморфных функций, связанных с арифметически определенными фуксовыми группами, приводит к так называемой арифметической теории автоморфных функций. Начало этой теории положил сам А.Пуанкаре, заметивший, что группа целочисленных автоморфизмов неопределенной рациональной квадратичной формы от трех переменных естественно **изоморфна** некоторой фуксовой группе. В дальнейшем арифметическая теория автоморфных функций разрабатывалась многими авторами. Значительных успехов в этом направлении добились М.Эйхлер и Г.Шимура» [8, с.717].

Что касается влияния теоретико-числовых идей Ш.Эрмита на творчество А.Пуанкаре, то информацию об этом можно почерпнуть из книги Е.П.Ожиговой «Шарль Эрмит» [9]. Автор констатирует: «…Пуанкаре в начале своего научного пути внимательно изучал труды Эрмита…» [9, с.186]. «…Пуанкаре, еще будучи студентом Политехнической школы, писал родным, что изучает труды своего профессора Шарля Эрмита…» [9, с.187].

2. Аналогия вторая: обобщение формулы Л.Эйлера для выпуклых многогранников

В 1736 г. знаменитый швейцарский и российский математик Леонард Эйлер решил задачу о семи кенигсбергских мостах, в результате чего возникла новая математическая дисциплина – теория графов. А спустя 14 лет (в 1750 г.) он нашел формулу, связывающую число вершин, ребер и граней для трехмерных выпуклых многогранников, которая явилась первой формулой топологии. Сегодня топологию определяют как раздел геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях. Фигур, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек. Л.Эйлер установил, что если N – число вершин выпуклого многогранника, E – число его ребер и F – число граней, тогда верно равенство $N - E + F = 2$. Число $X = N - E + F$ называется эйлеровой характеристикой многогранника (для выпуклого многогранника эта характеристика равна 2).

Первое (индуктивное) доказательство формулы Л.Эйлера предложил О.Коши, а первое обобщение – математик Симон Люилье (1750-1840). С.Люилье обобщил ее на многогранники с отверстиями, которые можно нарисовать на поверхности сферы или на поверхности, полученной из сферы непрерывным преобразованием.

Занимаясь вопросами топологии, А.Пуанкаре пришел к выводу, что формула Л.Эйлера для выпуклого многогранника должна иметь свой аналог в области n-мерных многообразий (для случая произвольной размерности). Иначе говоря, французский математик осознал необходимость переноса «трехмерной» формулы Л.Эйлера, а вместе с ней и понятия эйлеровой характеристики, на многомерное пространство. Осуществив этот перенос, А.Пуанкаре получил формулу, которая стала важным результатом топологической науки.

А.Тяпкин и А.Шибанов в книге «Пуанкаре» [10] пишут о том, как французский математик обобщил формулу Л.Эйлера: «Еще Л.Эйлером была высказана замечательная теорема о многогранниках: если к числу вершин любого многогранника прибавить число его граней и вычесть из этой суммы число ребер, то в итоге всегда будет получаться цифра два. Метод триангуляции позволяет обобщить теорему Эйлера на любую фигуру, даже на округлую, ведь нарисованные на ее поверхности треугольные ячейки можно считать гранями воображаемого многогранника. Расчеты по формуле Эйлера снова дадут цифру. Каждой внешней форме тела можно сопоставить, таким образом, число, топологический инвариант, значение которого определяется только видом поверхности. Для сферы и тора, например, эти числа различны. **Пуанкаре обобщил теорему Эйлера на многомерные фигуры,** то есть доказал формулу, связывающую число вершин, ребер и граней непредставимого воображением многогранника в многомерном пространстве. И в многомерной геометрии появился числовой топологический инвариант, предельно простой по смыслу и удобный в употреблении» [10, с.223].

Об этом же пишет А.М.Зубков в статье «Эйлер и комбинаторика» [11]: «После решения задачи о мостах Эйлер, видимо, продолжал размышлять о «геометрии положений» и в 1750 г. в письме Гольдбаху (смотрите также [4]) он сообщил о найденной им формуле, связывающей число V вершин, число E ребер и число F граней выпуклого многогранника: N – E + F = 2. Первое строгое доказательство этой формулы, которую называют теперь формулой Эйлера, опубликовал О.Коши [3] в 1813 г., когда ему было около 20 лет. Доказательство Коши является индуктивным и использует наглядные, а не аналитические, соображения. В 1893 г. А.Пуанкаре [15] обобщил формулу Эйлера на n-мерные политопы…» [11, с.9].

Возвращаясь к вопросу об эйлеровой характеристике, перенесенной А.Пуанкаре на многомерный случай, укажем, что теперь она называется «характеристикой Эйлера - Пуанкаре». Д.С.Ричесон в книге «Жемчужина Эйлера» [12] замечает: «…Обобщение эйлеровой характеристики на n-мерное пространство называется характеристикой Эйлера – Пуанкаре многообразия M» [12, с.264].

3. Аналогия третья: обобщение понятия коэффициента зацепления, введенного К.Гауссом

Занимаясь вопросами комплексного анализа, особенно доказательством того, что каждое полиномиальное уравнение имеет, по крайней мере, одно решение в комплексных числах, Карл Гаусс рассмотрел порядок кривой на плоскости: сколько оборотов она делает относительно заданной точки. «Задачи из области электричества и магнетизма подсказали коэффициент зацепления двух замкнутых кривых: сколько раз одна из них проходит сквозь другую» [13, с.260].

Автор работы [13] намекает на то, что «король математиков» открыл коэффициент зацепления (важный топологический инвариант) эмпирически, основываясь на изучении явлений электричества и магнетизма. И, действительно, по свидетельству специалистов, К.Гаусс сделал упомянутое открытие после изучения опытов Майкла Фарадея (1791-1867), который, как известно, открыл эффект электромагнитной индукции. С.П.Новиков в статье «Топология в ХХ веке: взгляд изнутри» [14] пишет: «…Гаусс пришел к ряду нетривиальных топологических наблюдений после анализа опытов Фарадея, где человечество впервые увидело электромагнитные явления. В частности, Гаусс открыл так называемое число зацепления двух замкнутых попарно непересекающихся кривых в трехмерном пространстве, не меняющихся при деформациях без пересечений. Именно Гаусс и поставил задачу о построении точной теории подобных свойств. Термин «топология» возник в работе его ученика Листинга» [14, с.5].

К.Гаусс ничего не опубликовал по этой теме, но упоминал ее в письмах и рукописях. О своих топологических соображениях он сообщил, в частности, Иоганну Листингу и Августу Мебиусу (чьим именем названа «лента Мебиуса»). Когда А.Пуанкаре узнал о коэффициенте зацепления Гаусса, у него возникла вполне естественная мысль о том, чтобы перенести это понятие на n-мерные многообразия. Он пришел к заключению, что в многомерном пространстве должен существовать тот же топологический инвариант, который был введен Гауссом для нашего трехмерного мира. В результате французский математик обобщил указанный коэффициент зацепления на случай произвольной размерности. Точно так же он обобщил числа Бетти – инварианты топологического пространства, введенные итальянцем Энрико Бетти (1823-1892) после плодотворных бесед с Б.Риманом.

И.Стюарт в книге «Значимые фигуры» [15] говорит об эволюции понятия коэффициента зацепления: «Гаусс сделал первые шаги к топологии и ввел понятие коэффициента зацепления – топологического свойства, которое часто можно использовать для доказательства того, что две сцепленные кривые невозможно расцепить при помощи непрерывной деформации. Эту концепцию позже обобщил для более высоких размерностей Пуанкаре» [15, с.170].

Сведения о том, что А.Пуанкаре экстраполировал (распространил) числа Бетти на поверхности произвольной размерности, можно найти в книге А.Искьердо «Математика теряет форму» [16], где сообщается: «Пуанкаре **обобщил** идеи Бетти для поверхностей любой размерности. Эти поверхности, в свою очередь, могут состоять из различных связных или несвязных поверхностей, технически это называют разнородность. Именно этот термин использовал Пуанкаре в своих работах» [16, с.101-102].

4. Аналогия четвертая: рождение индекса Кронекера - Пуанкаре

В 1837 г. известные французские математики Шарль Франсуа Штурм и Жозеф Лиувилль сформулировали теорему об отделении вещественных корней целых алгебраических уравнений. В том же году она была доказана О.Коши (о котором мы упоминали выше). Эта теорема привлекла внимание немецкого математика Леопольда Кронекера (1823-1891), одного из суровых критиков теории множеств Г.Кантора и теории иррациональных чисел, созданной К.Вейерштрассом. Высказанная однажды Л.Кронекером фраза «Бог создал натуральные числа, всё прочее – дело рук человека» как раз выражала его отношение к двум указанным математическим концепциям. Хотя Л.Кронекер ошибался, считая бесперспективными эти концепции, он поступил вполне дальновидно, решив обобщить упомянутую теорему Штурма – Лиувилля на многомерный случай. При этом он получил результат, который сегодня называют «характеристикой Кронекера», «концепцией характеристик Кронекера», «индексом Кронекера».

Происхождение понятия «характеристики Кронекера» известно выдающемуся отечественному математику Н.Г.Четаеву, который в статье «Об одной мысли Пуанкаре» [17] указывает: «Характеристики Кронекера, через которые легко выражаются необходимые и достаточные условия устойчивости или неустойчивости движений, являются обобщением известной в алгебре теоремы Штурма об отделении вещественных корней целых алгебраических уравнений» [17, с.3].

Об этом же пишет Ю.Ю.Царицанская в диссертации [18]: «Первые результаты относительно нахождения числа корней системы двух уравнений с двумя неизвестными были получены Ш.Ф.Штурмом и Ж.Лиувиллем. Работа Л.Кронекера «Uber Systeme von Functionen mehrer Variabeln» (1869) стала обобщением данных результатов на случай n-измерений» [18, с.20].

Н.Г.Четаев предложил интересное (достаточно наглядное) пояснение характеристики Кронекера. Е.М.Богатов в статье [19] приводит это пояснение: «Пусть имеется участок суши, изрезанный водными преградами (реками, озерами и т.п.). Если по такому участку проделать какой-нибудь замкнутый путь, то, очевидно, столько раз придется выходить из воды на сушу, сколько раз входить с суши в воду. Аналогично и в пространстве: если в нем имеются как-то расположенные тела Rα и некоторая замкнутая линия L, то при обходе линии L в каком-либо направлении мы будем столько раз выходить из тел Rα, сколько раз в них входили» [19, с.98].

Разрабатывая качественную (топологическую) теорию дифференциальных уравнений, А.Пуанкаре сделал важный шаг: он перенес в нее характеристику Кронекера (индекс Кронекера). Для исследования особых точек на поверхности, которая соответствует системе дифференциальных уравнений определенного вида, А.Пуанкаре ввел понятие индекса поверхности, определяя его через интеграл Кронекера. Этот индекс оказался равен разности между числом положительных и числом отрицательных особых точек, принадлежащих этой поверхности. Таким образом, французский математик открыл объект, названный «индексом Пуанкаре», по аналогии с «индексом Кронекера».

Ю.Ю.Царицанская в уже упомянутой диссертации [18] пишет: «Выявленная в исследованиях Л.Кронекера связь между характеристикой системы функций и числом завиваний поверхности вокруг точки в пространстве **была положена А.Пуанкаре в основу** понятия индекса замкнутой поверхности и использовалась им в работах по теории устойчивости для описания количества и типов особых точек поверхностей в пространстве...» [18, с.58]. «Таким образом, - резюмирует автор, - теория характеристик Л.Кронекера оказалась перспективной и плодотворной областью математики, получившей развитие не только в направлении алгебраических исследований, но и в других ее разделах» [18, с.58].

5. Аналогия пятая: построение качественной теории дифференциальных уравнений

Сказанное позволяет понять, как А.Пуанкаре создал качественную теорию дифференциальных уравнений, которая рассматривается специалистами как одно из главных его научных достижений. Он построил эту теорию в результате того, что перенес в нее идеи и методы топологии – математической дисциплины, которая родилась в трудах Л.Эйлера, К.Гаусса, И.Листинга, Б.Римана, Э.Бетти и, конечно, самого А.Пуанкаре, который обобщил многое из того, что уже было известно. Можно сказать, что А.Пуанкаре обнаружил аналогию между задачами, связанными с разработкой качественной теории дифференциальных уравнений, и теми возможностями, которые содержались («скрывались») в идеях топологии. Эта аналогия заставила его применить топологические идеи для описания решений дифференциальных уравнений без проведения стандартных вычислений, применяемых в математическом анализе.

И.Стюарт в книге «Значимые фигуры» [15] пишет об указанном переносе, осуществленном А.Пуанкаре: «Пуанкаре одним из первых распознал значение новой, только что зародившейся математической области – топологии, или «геометрии резинового листа», в которой фигуры можно непрерывно деформировать, - и распространил ее с двух измерений на три и более. Он **применил** ее законы к дифференциальным уравнениям и исследовал задачу трех тел в ньютоновом поле тяготения» [15, с.17-18]. «В 1881 г. Пуанкаре разработал, - продолжает автор, - совершенно новый способ подхода к дифференциальным уравнениям и изложил его в «Записке о кривых, определенных дифференциальным уравнением». Этой статьей он заложил фундамент качественной теории дифференциальных уравнений, которая пытается вывести свойства решений дифференциального уравнения, не записывая для этого ни формул, ни рядов и не вычисляя их численно. Вместо этого теория использует общие топологические свойства фазового портрета – множества всех решений, рассматриваемого как единый геометрический объект» [15, с.302].

И.Стюарт подчеркивает, что перенос, осуществленный А.Пуанкаре, позволил сделать открытия, определившие лицо современной нелинейной динамики: «Вывод Пуанкаре о том, что топологические методы позволяют сделать глубокие выводы о решениях дифференциальных уравнений даже в тех случаях, когда формул для этих решений не существует, составляет основу сегодняшнего подхода к нелинейной динамике, которая находит применение едва ли не во всех областях естественных наук» [15, с.304].

Следует отметить, что первый стимул (толчок) для разработки качественной теории дифференциальных уравнений А.Пуанкаре получил от своих соотечественников, крупных математиков Шарля Огюста Брио (1817-1882) и Жана-Клода Буке (1819-1885), которые были его учителями. Эти ученые подали своему молодому коллеге замечательный пример – они исследовали качественными методами дифференциальные уравнения, решениями которых являются эллиптические функции.

А.Тяпкин и А.Шибанов в книге «Пуанкаре» [10] повествуют: «В одной из своих монографий Брио и Буке отмечали: «Случаи, когда можно интегрировать дифференциальное уравнение, в высшей степени редкие и должны рассматриваться как исключения. Но можно рассмотреть дифференциальное уравнение как определяющее функцию и заняться изучением свойств этой функции по данному дифференциальному уравнению». Из самого дифференциального уравнения авторы предлагали извлекать информацию о той неизвестной функции, которая является его решением. Этот новый подход превращал все не решенные до сих пор дифференциальные уравнения в неисчерпаемый источник новых трансцендентных функций. К сожалению, не было примеров подобных открытий на этом заманчивом, многообещающем пути. Сами Брио и Буке продемонстрировали свой метод на известных эллиптических функциях, установив их основные свойства, которые уже были объектом исследования многих математиков.

Анри Пуанкаре, со студенческих лет находившийся **под большим влиянием** идей Брио и Буке, решил воспользоваться их рекомендацией, разработанным ими методом. Приняв в качестве определения искомой функции линейное дифференциальное уравнение с алгебраическими коэффициентами, он пришел к первому важному результату: функция, являющаяся решением такого уравнения, должна оставаться неизменной при дробно-линейных преобразованиях переменной величины, от которой она зависит. Это свойство функции сразу же позволяло отнести ее к разряду особого рода периодических функций, если пересмотреть и расширить понятие периодичности» [10, с.116-117].

6. Аналогия шестая: разработка метода последовательных приближений для изучения задачи трех тел

Открыв закон всемирного тяготения, И.Ньютон показал, что движение планет Солнечной системы можно описывать с помощью дифференциальных уравнений, которые, в свою очередь, решаются с использованием бесконечных тригонометрических рядов (рядов Тейлора). С тех пор усилия многих поколений ученых были направлены на поиск методов, посредством которых можно было бы получить последовательно сколь угодно точные приближения к решению в виде суммы периодических функций. Эти методы получили название теории возмущений. В их основе лежит идея вариации произвольных постоянных, восходящая к Л.Эйлеру и подробно развитая Ж.Лагранжем. В данном случае произвольные постоянные – это постоянные интегралов дифференциальных уравнений, то есть параметры, с помощью которых определяются размеры и положение в пространстве невозмущенной эллиптической орбиты и положения на ней планеты в данный момент движения. Теория возмущений планетных орбит позволила астрономам не только предсказывать с большой точностью движение известных планет Солнечной системы. Ее подлинным триумфом явилось открытие Нептуна, который был «вычислен» Д.Адамсом и У.Леверье по возмущениям в движении Урана: эти возмущения нельзя было объяснить влиянием других (известных) планет. Несмотря на этот успех, математики и астрономы продолжали совершенствовать методы теории возмущений, и во второй половине XIX веке на смену «старым» алгоритмам Л.Эйлера и Ж.Лагранжа пришли новые вычислительные приемы (процедуры). Они дали возможность избежать появления вековых и смешанных членов (накапливающихся со временем возмущений планетных орбит, способных радикально изменить историю Солнечной системы).

Один из таких новых методов, основанных на использовании бесконечных тригонометрических рядов, разработал А.Пуанкаре. Предложенный им алгоритм приводил к полностью периодическим решениям (периодические решения означают отсутствие опасных вековых возмущений). Французский математик применил данный алгоритм к задаче трех тел – проблеме описания поведения трех небесных объектов, взаимодействующих друг с другом посредством гравитации.

Как же А.Пуанкаре изобрел указанный метод, более эффективный, чем «старые» вычислительные процедуры Л.Эйлера и Ж.Лагранжа? По аналогии с методом последовательных приближений, созданным шведским астрономом и математиком Андерсом Линдстедтом (1854-1939). А.Линдстедт (Линдштедт) осознавал плодотворность своего метода, но ввел некоторые формальные ограничения на его применимость. А.Пуанкаре показал, что алгоритм Линдстедта, также называемый «методом устранения секулярных членов», дает верные результаты и без введенных им ограничений.

В.А.Бронштэн в книге «Как движется Луна?» [20] сообщает: «Шведский математик и астроном Андерс Линдстедт, о котором мы уже писали, основываясь на идеях Гюльдена и работах Ньюкома, развил в 1882 году метод последовательных приближений, приводящий к полностью периодическим решениям. При этом все вековые члены исключались. Спустя год Линдстедт показал, что его метод может быть успешно применен к задаче трех тел. Однако он ввел некоторые формальные ограничения на применимость своего метода. В 1886 году французский астроном и математик Анри Пуанкаре доказал, что метод Линдстедта применим и без введенных им ограничений. Затем он обобщил метод Линдстедта, применил его к задаче трех тел и представил его в таком виде, что, по выражению современного бразильского теоретика Жоржио Джакальи, этот метод стал едва узнаваем. Пуанкаре указал также возможность применения этого метода к изучению вековых и долгопериодических возмущений в теории движения планет. Метод

Линдстедта и его усовершенствование Пуанкаре произвели большое впечатление на астрономов того времени» [20, с.168-169].

Здесь упоминаемые автором Гюльден и Ньюком – весьма известные ученые. Саймон Ньюком (1835-1909) – американский астроном и математик, измеривший астрономические константы (прецессия планет, нутация, аберрация) и составивший каталог точных положений звезд. Гуго Гюльден (1841-1896) – финско-шведский астроном, который, наряду с Ш.Брио и Ж.Буке, развивал качественный подход к проблемам небесной механики. Он предлагал рассматривать какую-либо задачу небесной механики, изучая свойства решений заданных дифференциальных уравнений, не получая самих решений [20, с.137]. А.Пуанкаре знал о работах Г.Гюльдена (Гильдена): об этом свидетельствуют многочисленные ссылки на него, содержащиеся в «Новых методах небесной механики» [21].

7. Аналогия седьмая: формулировка теоремы об отсутствии новых (неклассических) интегралов в задаче трех тел

Еще П.Лаплас в своем «Трактате по небесной механике» при исследовании движения планет применил «первые интегралы», представляющие собой алгебраические соотношения, позволяющие описывать координаты и скорости планет. Позже математики назвали их классическими. Было установлено, что в задаче трех тел имеется 10 алгебраических соотношений (интегралов): шесть интегралов движения центра масс трех тел, три интеграла площадей (они выражают второй закон Кеплера) и интеграл энергии. К сожалению, этих десяти классических интегралов совершенно недостаточно для решения задачи трех тел, т.е. для того, чтобы представить ее решение в виде конечного алгебраического выражения. Поэтому возник вопрос: существуют ли другие (еще неизвестные) интегралы, которые могли бы помочь в решении указанной задачи?

В «Новых методах небесной механики» [21] А.Пуанкаре сформулировал теорему о том, что в задаче трех тел не существует никаких новых «первых интегралов», помимо десяти уже известных. Это означало, что динамическая система из трех взаимодействующих тел является неинтегрируемой системой. Поэтому результат А.Пуанкаре часто называют «теоремой о неинтегрируемости динамических (гамильтоновых) систем» или «теоремой о несуществовании аналитических интегралов», которые можно представить в виде сходящихся рядов.

Как А.Пуанкаре открыл данную теорему? По аналогии с теоремой, сформулированной его немецким коллегой Генрихом Брунсом. В частности, в 1887 г. Г.Брунс установил, что решение задачи трех тел нельзя представить в виде конечного алгебраического соотношения (интеграла), поскольку, помимо десяти классических первых интегралов, не существует других первых интегралов. Ознакомившись с этим результатом, французский математик решил исследовать возможность его переноса на более общую ситуацию. В теореме Г.Брунса речь шла об отсутствии новых алгебраических интегралов. А.Пуанкаре распространил ее на трансцендентные функции, заявив, что не существует и каких-либо трансцендентных интегралов, позволяющих справиться с задачей трех тел.

В.А.Бронштэн [20] отмечает: «…В 1887 г. немецкий астроном и математик Г.Э.Брунс (1848-1919) строго доказал, что задача трех тел не может быть решена в конечном виде, точнее, что ее решение нельзя представить конечным алгебраическим выражением. Спустя два года выдающийся французский астроном и математик Анри Пуанкаре (1854-1912) усилил это доказательство, показав, что задачу нельзя решить и с помощью трансцендентных выражений, однозначно зависящих от координат и компонентов скоростей трех тел» [20, с.64].

Сам А.Пуанкаре в «Новых методах…» [21] сначала излагает свою теорему о неинтегрируемости, а затем переходит к обсуждению результата

Г.Брунса. Французский математик аргументирует: «Известно, что Брунс доказал («Acta Mathematica», т.II), что задача трех тел не допускает нового алгебраического интеграла, кроме уже известных. Предыдущая теорема (теорема Пуанкаре – Н.Н.Б.) в некотором смысле более общая, чем теорема Брунса, так как я доказал не только то, что не существует алгебраического интеграла, но и что не существует даже однозначного трансцендентного интеграла…» [21, с.222].

Разумеется, перенос, осуществленный А.Пуанкаре, не был механическим. Сначала ученый эмпирически исследовал трансцендентные функции (соотношения) на предмет возможности их использования для решения задачи трех тел. И лишь убедившись в том, что они не дают такого решения, он понял, что в области трансцендентных функций существует теорема, аналогичная теореме Г.Брунса для алгебраических функций. Любая аналогия (чтобы избежать ошибок) требует эмпирической проверки.

8. Аналогия восьмая: формулировка теоремы о возвращении механической системы в окрестность начального состояния

Изучая вопрос о стабильности Солнечной системы, А.Пуанкаре открыл теорему о том, что система из материальных точек, обладающих массами и движущихся по законам механики, через некоторое время обязательно должна вернуться в состояние, весьма близкое к первоначальному. Французский математик использовал эту теорему для решения задач небесной механики, но она оказалась на редкость универсальной и впоследствии стала применяться далеко за пределами теоретической астрономии. Например, немецкий математик Эрнст Цермело (1871-1953) перенес ее в молекулярно-кинетическую теорию, то есть на совокупность свободно движущихся молекул или атомов. Здесь, в этой области, теорема Пуанкаре приобрела следующую формулировку: газовая система, состоящая из огромного числа частиц, непременно должна вернуться в окрестность начального состояния. Понимая, что это утверждение противоречит второму началу термодинамики, а также необратимости термодинамических процессов, о которой писал в своих работах Л.Больцман, Э.Цермело вступил с ним в дискуссию.

Л.Больцман, предложивший статистическую интерпретацию принципа роста энтропии, заявлял, что для систем, включающих огромное число хаотически движущихся молекул, время возврата в начальное состояние должно быть астрономически большим. Сегодня мы знаем, что Л.Больцман был прав. Тем не менее, теорема Пуанкаре о возвращении («возвратная теорема»), соединенная с математической теорией меры и концепцией о взаимно однозначных отображениях, стала основой нынешнего учения о взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях множеств, инвариантных относительно меры. Эта же теорема нашла широкое применение в эргодической теории – разделе математики, изучающем статистические свойства детерминированных динамических систем.

Обращаясь к вопросу о происхождении «возвратной теоремы» А.Пуанкаре, подчеркнем, что он открыл ее по аналогии с идеей С.Пуассона (1809), содержащей новое определение устойчивости в небесной механике.

Ф.Диаку и Ф.Холмс в книге «Небесные встречи» [22] пишут: «…Пуассон предложил новое определение устойчивости, отличающееся от определения Лапласа и Лагранжа. Его предшественники требовали, чтобы главные оси эллипсов (эллипсов орбит планет – Н.Н.Б.) оставались в рамках некоторых пределов. Дени Пуассон так не считал. Он сказал, что движение системы частиц устойчиво, если ее конфигурация снова и снова **возвращается в окрестность** начального положения. Хотя в этом смысле устойчивыми являются и точки равновесия вроде тех, что изображены на рисунках, это определение гораздо более обширно и включает другие движения, устойчивость которых не столь очевидна. Определение устойчивости

Пуассона стало **отправной точкой** для теоремы Пуанкаре о возвращении, о которой мы упоминали в конце второй главы» [22, с.185].

Об этом же сообщает В.М.Алексеев [23]. Он отмечает, что Ж.Лагранж изучил устойчивость планетной системы в первом приближении, после чего С.Пуассон продолжил эту работу, но уже во втором приближении: «В 1809 г. Пуассон продолжил эти исследования и показал, что и во втором приближении большие полуоси не содержат вековых членов (вида Ct^m), но включают смешанные члены ($At \times \cos (nt + \omega)$). Ясно, что решение, содержащее смешанный член, не будет устойчивым по Лагранжу, так как амплитуда такого члена неограниченно возрастает. Всё же и здесь имеет место устойчивость в некотором ослабленном смысле, так как решение **возвращается к своему начальному значению** бесконечно много раз. Такое явление было названо Пуанкаре устойчивостью по Пуассону, и в третьем томе данного сочинения продемонстрировано его значение для задач динамики» [23, с.754].

9. Аналогия девятая: использование понятия периодических решений (замкнутых кривых) при решении задачи трех тел

В 1889 г. королю Норвегии и Швеции Оскару II должно было исполниться 60 лет. Норвежский математик Геста Миттаг-Леффлер убедил короля объявить к юбилею конкурс на решение задачи трех и большего числа тел с немалым денежным призом. Решение должно было представлять собой некий сходящийся степенной ряд. А.Пуанкаре, заинтересовавшийся конкурсом, начал работать над задачей. В ходе этой работы он пришел к выводу о необходимости использовать понятие периодических решений (замкнутых кривых). Другими словами, французский математик осознал плодотворность рассмотрения вопроса об устойчивости планетной системы и конкурсной задачи трех тел сквозь призму наличия или отсутствия периодических решений (замкнутых кривых).

Как у А.Пуанкаре возникла эта мысль (догадка)? По аналогии с исследованиями американского математика и астронома Джорджа Хилла (1838-1914), который в своем трактате 1878 г. впервые обратил внимание на важность периодических решений, т.е. замкнутых кривых, при исследовании проблемы устойчивости Солнечной системы. Кроме того, Дж.Хилл нашел периодическое решение задачи трех тел для случая, когда масса одного из них пренебрежимо мала по сравнению с остальными телами. Можно сказать, что А.Пуанкаре, ознакомившись с трактатом американского ученого, перенес его метод периодических решений с указанного частного случая на общий случай задачи трех тел. Да, в первом варианте своей работы, отправленной на конкурс короля Оскара II, А.Пуанкаре ошибся, решив, что эта задача допускает решение в виде замкнутых кривых. Но даже с учетом этой ошибки понятие периодических решений оказалось очень полезным и стало одним из центральных в теории динамических систем.

Карлос Мадрид в книге «Бабочка и ураган» [24] раскрывает исходные посылки идей А.Пуанкаре: «За несколько лет до проведения конкурса, в 1878 году, американский астроном Джордж Уильям Хилл привлек всеобщее внимание к важности периодических решений (замкнутых кривых) задачи об устойчивости Солнечной системы. Периодическое (то есть повторяющееся) движение очень полезно при изучении устойчивости: при таком движении тело никогда не сойдет с орбиты, не столкнется с другим телом и не улетит бесконечно далеко. Хилл нашел периодическое решение задачи трех тел для случая, когда масса одного из них пренебрежимо мала по сравнению с остальными. Проблема Хилла представляла собой частный случай задачи трех тел, в котором легкая планета движется под действием сил притяжения двух одинаковых звезд, лежащих в одной плоскости. Изучив проблему Хилла, Пуанкаре доказал: эту проблему, равно, как и общий случай задачи трех тел, нельзя решить классическими методами решения дифференциальных уравнений – в отличие от задачи двух тел (ее решили Ньютон, Бернулли, Эйлер)…» [24, с.28].

Саймон Ньюком, авторитетный специалист в области небесной механики, весьма высоко оценивал научные заслуги Джорджа Хилла, называя его «величайшим из живущих мастеров в высшей и наиболее сложной отрасли астрономии, который завоевал своей стране всемирную известность в науке, получая вознаграждение государственного служащего» [20, с.131].

10. Аналогия десятая: открытие динамического хаоса

После того, как А.Пуанкаре направил свою работу по проблеме трех тел на соискание премии короля Оскара II, Карл Вейерштрасс, выдающийся немецкий математик, дал ей высокую оценку. Тем не менее, он нашел в сочинении молодого ученого ряд неясных мест. На эти же неясные места (лакуны в цепи доказательных рассуждений) обратил внимание Ларс Эдвард Фрагмен (1863-1937), редактор журнала «Acta Mathematica». Пытаясь усовершенствовать свои аргументы, А.Пуанкаре понял, что он допустил ошибку: задача трех тел в общем случае не допускает решение в виде периодических траекторий (замкнутых кривых). Напротив, в этой задаче возникают хаотические орбиты. Если использовать терминологию А.Пуанкаре, возникают двоякоасимптотические решения, то есть сепаратрисы, проходящие через седловые точки. Эти точки французский математик называл «гомоклиническими». Можно сказать, что сепаратрисы, проходящие через седловые точки, и определяли хаотические орбиты.

Изложенное позволяет понять, что А.Пуанкаре открыл хаотические траектории чисто эмпирически (индуктивно), в процессе исправления ошибки, которую он обнаружил, когда пытался устранить неясные места, привлекшие внимание К.Вейерштрасса и Э.Фрагмена. Но чтобы правильно интерпретировать (истолковать) хаотические решения, полученные в ходе работы над задачей трех тел, необходимо было использовать топологию. Другими словами, нужно было перенести в область задачи трех тел топологические идеи, ранее позволившие французскому ученому разработать качественную теорию дифференциальных уравнений. Таким образом, выявленная им аналогия между топологией и дифференциальными уравнениями, описывающими движение трех взаимодействующих тел, привела его к тем результатам, которые сегодня признаются выдающимися.

Еще раз процитируем И.Стюарта, который в книге «Значимые фигуры» [15] пишет о том, как Пуанкаре использовал топологию в задаче трех тел: «Он применил ее законы к дифференциальным уравнениям и исследовал задачу трех тел в ньютоновом поле тяготения. Это привело его к открытию возможности детерминистического хаоса – случайного на первый взгляд поведения в детерминированных системах» [15, с.18].

Этот же аспект творческого успеха А.Пуанкаре отмечает К.Мадрид в книге «Бабочка и ураган» [24]: «В 1881 году, за четыре года до проведения конкурса, Пуанкаре уже понимал, что созданную им новую качественную теорию можно использовать для решения задачи трех тел и ответа на вопрос об устойчивости Солнечной системы» [24, с.28]. Автор добавляет: «Пуанкаре, оставив анализ, обратился к топологии, решив, что если он рассмотрит вопрос с другой стороны, то докажет существование периодических решений. Так как устойчивость решений нельзя было оценить путем изучения рядов, Пуанкаре решил использовать свою качественную теорию дифференциальных уравнений…» [24, с.29].

Ниже мы приводим таблицу, которая поясняет значение некоторых терминов, использованных А.Пуанкаре в качественной (топологической) теории дифференциальных уравнений.

Таблица 1. Термины, использованные А.Пуанкаре в качественной (топологической) теории дифференциальных уравнений

№	**Особые точки дифференциальных уравнений и другие объекты**	**Разъяснение значения термина**
1.	Центры	Особые точки, окруженные периодическими орбитами
2.	Фокусы	Особые точки, которые притягивают близлежащие траектории
3.	Узлы	Являются неустойчивыми, так как отталкивают близлежащие траектории
4.	Седла	Особые точки, которые являются устойчивыми и неустойчивыми одновременно; седла – это точки, в которых словно сталкиваются два потока воды. Пуанкаре называл седла гомоклиническими точками
5.	Сепаратрисы	Траектории, которые пересекаются точно в седле. Пуанкаре называл эти траектории «двоякоасимптотическими»

11. Аналогия одиннадцатая: важное наблюдение, которое способствовало развитию теории линейных операторов

В математике известна теорема о приведении квадратичной формы конечного числа переменных к главным осям. Она играет важную роль в аналитической геометрии и линейной алгебре. Кроме того, она является основой для теории свободных колебаний системы конечного числа материальных точек. Различные проблемы теории колебаний привели к целому ряду краевых задач математической физики. А.Пуанкаре (1894) сделал наблюдение, которое оказало влияние на развитие аналитической теории собственных значений, а также теории линейных операторов. Он обнаружил аналогию между теорией краевых задач и алгебраической задачей приведения квадратичной формы к главным осям.

На эту же аналогию обратил внимание немецкий математик Давид Гильберт (1862-1943), который, отталкиваясь от этой эквивалентности, создал теорию линейных операторов в пространстве, названном «гильбертовым». В свою очередь, на базе теории линейных операторов вырос функциональный анализ – раздел анализа, в котором изучаются бесконечномерные топологические векторные пространства и их отображения. А в 1926 г. немецкий физик, известный своими работами по теории сверхпроводимости, Фриц Лондон перенес теорию линейных операторов в функциональных пространствах в область физики, а именно в квантовую механику, которую он тогда изучал. Позже ученые (Джон фон Нейман и другие) поняли, что теория гильбертовых пространств – наиболее адекватный язык для описания идей квантовой механики. А всё началось с аналогии, выявленной А.Пуанкаре и Д.Гильбертом при сопоставлении разных разделов математики!

Об аналогии А.Пуанкаре пишет А.И.Плеснер в статье «Спектральная теория линейных операторов» [25]: «…Сложные проблемы колебаний (колебания струны, мембраны и т.п.) привели в теории дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, к целому ряду краевых задач, которые, несмотря на разнообразие их аналитического характера, обнаруживали далеко идущую **аналогию** с алгебраической задачей приведения квадратичной формы к главным осям. До появления общей теории наиболее полно и ярко эта аналогия была освещена Пуанкаре [1] на примере мембраны» [25, с.3].

Об этом же сообщает Н.Н.Круликовский в монографии «Пути развития спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов» [26]: «…Важным фактором для создания общей аналитической теории собственных значений оказалась обнаруженная глубокая **аналогия** между рассматриваемыми вопросами теории краевых задач математической физики с алгебраической задачей приведения квадратичной формы к главным осям.

На частном примере эта **аналогия** была рассмотрена в 1894 г. А.Пуанкаре» [26, с.3].

Что касается аналогии Д.Гильберта, то она освещается в статье Г.Вейля «Давид Гильберт и его математическое творчество» [27]. Автор пишет, что Д.Гильберт, ознакомившись с теорией интегральных уравнений Фредгольма, установил, что дифференциальное уравнение колеблющейся мембраны можно преобразовать в неоднородное интегральное уравнение с симметричным ядром. При этом задача нахождения «собственных значений» и «собственных функций» этого интегрального уравнения «является интегральным аналогом задачи о приведении квадратичной формы от n переменных к главным осям» [27, с.248].

Теория гильбертовых пространств стимулировалась также другими аналогиями, о которых говорит Л.А.Люстерник в статье «Молодость московской математической школы» [28]: «**Аналогия** между ортогональностью векторов (сумма произведений координат равна нулю) и ортогональностью функций (интеграл от произведений равен нулю) отражена в самой терминологии. Разложению вектора по ортогональной системе векторов отвечает разложение функций по ортогональной системе функций. Такая же связь – с переходом от сумм к интегралам – между расстоянием в n-мерном евклидовом пространстве и квадратическим отклонением функций. Она привела к созданию так называемого **гильбертова функционального пространства**, в котором расстояние есть среднеквадратическое отклонение, сходимость в среднем, и в котором «полные ортогональные системы» играют роль ортогональной системы координат, коэффициенты Фурье – координат, при этом равенство Парсеваля есть аналог теоремы Пифагора» [28, с.154].

«Развитие теории линейных дифференциальных и создание теории линейных интегральных уравнений Фредгольма, которая оказалась более близкой к теории систем линейных алгебраических уравнений, - продолжает Л.А.Люстерник, - привела к созданию охватывающей все эти теории общей теории линейных операторов. Особенную роль в развитии этой теории сыграла **аналогия** между теорией собственных значений матриц и собственных значений для дифференциальных и интегральных операторов. В работах Д.Гильберта 1908-1910 гг. теория линейных интегральных уравнений перерастает в теорию линейных операторов» [28, с.154].

Заслуги Ф.Лондона в переносе теории линейных операторов Д.Гильберта в область квантовой теории рассматриваются в книге М.Джеммера «Эволюция понятий квантовой механики» [29, с.289-290].

12. Аналогия двенадцатая: вклад в теорию относительности

Несмотря на то, что создателем специальной теории относительности (СТО) считается Альберт Эйнштейн, многие ключевые идеи этой теории впервые сформулировал А.Пуанкаре. Иначе говоря, он внес основополагающий вклад в разработку теории относительности. Как заметил А.А.Логунов, «всё последующее в этом направлении исследований – это применение и развитие его идей и методов» [30, с.150]. Французский математик вывел «преобразования Лоренца», открыл релятивистский закон сложения скоростей, сформулировал в электродинамике принцип относительности, получил соотношение между массой и энергией $E = mc^2$. Он же установил, что скорость света – верхний предел скорости передачи сигналов, а также описал относительность (субъективность) одновременности двух событий, происходящих в разных областях Вселенной.

Мы остановимся на двух релятивистских открытиях А.Пуанкаре: одно из них связано с формулировкой упомянутого принципа относительности, а второе – с «преобразованиями Лоренца». До возникновения специальной теории относительности в науке уже существовал принцип относительности - постулат, открытый Г.Галилеем и говорящий о физическом равноправии инерциальных систем отсчета в классической механике. Это равноправие проявляется в том, что законы механики во всех таких системах одинаковы. Г.Галилей (1636) приводил в пользу своего постулата мысленный опыт, в котором рассматриваются события, происходящие в закрытой каюте под палубой корабля. Этим опытом в свое время восхищался Н.И.Идельсон, который в книге «Этюды по истории небесной механики» [31] повествует: «Одно из самых глубоких открытий Галилея, которое мы назовем теперь принципом относительности классической механики, изложено им в «Диалоге». Этот принцип выражен здесь не в виде формул и теорем, а в виде красочного описания явлений, происходящих в закрытой каюте под палубой корабля» [31, с.86-87].

После того, как Д.Максвелл разработал теорию электромагнитных явлений, неизбежно должна была возникнуть мысль о том, что в этой теории должен существовать аналог (эквивалент) принципа относительности. Именно к этой мысли и пришел А.Пуанкаре (1904, 1905), который перенес принцип относительности Г.Галилея сначала на электромагнитные явления, а затем и на все остальные физические процессы.

А.А.Логунов в книге «Анри Пуанкаре и теория относительности» [30] указывает: «…Принцип относительности Галилея Пуанкаре распространил, без изменения его физической сущности, на все физические явления…» [30, с.26-27]. Говоря о том, что постоянство скорости света является следствием постулата относительности, А.А.Логунов в другом месте своей книги вновь обсуждает перенос, осуществленный А.Пуанкаре: «Следует особо подчеркнуть, что принцип постоянства скорости света, который А.Эйнштейн выдвинул как второй независимый постулат, на самом деле является частным следствием требования принципа относительности Пуанкаре, который он **распространил на все физические явления**» [30, с.41].

Теперь о «преобразованиях Лоренца». Имеются в виду преобразования, которым подвергаются пространственно-временные координаты (x, y, z, t) каждого события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. На самом деле нидерландский физик, создатель электронной теории, лауреат Нобелевской премии по физике за 1902 год, Хендрик Лоренц не открывал эти преобразования. Точнее, он пытался их открыть, но получил неверный результат. Правильные преобразования вывел А.Пуанкаре.

В.И.Арнольд в очерке «Что такое математика?» [32] пишет: «Релятивистские «преобразования Лоренца» никогда великим физиком Лоренцем не рассматривались: он поставил вопрос о группе преобразований симметрии уравнений электродинамики Максвелла, но решил его неверно, указав совсем не те преобразования, которые сейчас называют его именем. Пуанкаре, излагая эту ошибочную работу Лоренца в своих лекциях, нашел правильные преобразования, а при публикации этих своих результатов назвал их «преобразованиями Лоренца», и это название сохранилось до сих пор» [32, с.43].

Используя «преобразования Лоренца» в теории, которая позже была названа специальной теорией относительности, А.Пуанкаре реализовал еще одну аналогию: он перенес эти преобразования из области электромагнетизма на все остальные физические явления. То есть в данном случае французский математик поступил с этими преобразованиями так же, как с принципом относительности Г.Галилея.

А.А.Логунов [30], анализируя статьи А.Пуанкаре 1904-1905 гг., подчеркивает: «Именно в работах [2, 3] он распространяет лоренц-инвариантность на все силы природы, в том числе и гравитационные…» [30, с.54]. Далее автор повторяет эту мысль: «Группа Лоренца, открытая на основе изучения электромагнитных явлений, была распространена А.Пуанкаре [2, 3] на все физические явления» [30, с.102]. «Пуанкаре первым распространил преобразования Лоренца на любые силы природы, в том числе и гравитационные» [30, с.140].

13. Аналогия тринадцатая: обнаружение сходства (эквивалентности) между динамикой молекул в газе и динамикой звезд в галактике

А.Пуанкаре (1906) выявил аналогию между системой звезд, объединяющихся в галактики, и газовой системой, состоящей из огромного числа молекул. Этот результат натолкнул его на мысль, что математическое описание динамики звезд в составе галактик может быть таким же, как описание движения молекул в газовой системе. В дальнейшем эту аналогию развивали Дж.Джинс, А.Эддингтон, К.Шварцшильд и С.Чандрасекар. Они ввели в звездную динамику функцию распределения звезд по скоростям по аналогии с тем, как Максвелл и Больцман вводили функцию распределения молекул газа по тем же скоростям. Кроме того, А.Пуанкаре проводил аналогию между звездными скоплениями и ионизованным газом, состоящим из электронов и ионов и наблюдаемым в трубке Крукса (эта трубка также носит название катодной трубки Плюккера - Гитторфа – Гольдштейна).

Л.П.Осипков в очерке «Динамика системы звезд» [33] отмечает: «Выше неоднократно указывалось на **аналогию** между звездной системой, которая рассматривалась как совокупность большого числа гравитирующих точечных масс, и газом, ансамблем молекул или атомов. Понятие «звездный газ» ввел в 1904 г. лорд Кельвин, великий классик XIX в., а далее его развил А.Пуанкаре в замечательной статье «Млечный Путь и теория газов» (1906). Динамика звездных систем до сих пор строится на основе этой концепции. Как и в теории газов, основной в звездной динамике является функция распределения звезд по координатам и скоростям…» [33, с.89-90].

Далее автор пишет о статье А.Пуанкаре «Млечный путь и теория газов»: «Анри Пуанкаре в упоминавшейся статье отметил ряд отличий «звездного газа» от идеального и указал, что более правильным было бы сопоставить звездные системы с газом в трубке Крукса. Он имел в виду ионизованный газ, состоящий из электронов и ионов, которые взаимодействуют по закону

Кулона, т.е. речь шла о плазме, но в то время это слово физики еще не использовали. Действительно, у динамики звездных систем и у теории плазмы, созданной американцем И.Ленгмюром и советскими физиками Л.Д.Ландау и А.А.Власовым, исходные положения совпадают. «Самосогласованное поле» в плазме – это регулярные силы в гравитирующих системах. Как плазму, так и звездные системы обычно считают бесстолкновительными, а теория столкновительной плазмы строилась (в том числе Л.Спитцером) по образцу теории релаксации Джинса - Чандрасекара» [33, с.92].

Размышления А.Пуанкаре о возможности использования молекулярно-кинетической теории газов в астрофизике можно найти в его книге «Наука и метод» [5], где он говорит: «Астрономия развертывает перед нами гигантские картины и поднимает грандиозные вопросы. Нечего и думать о том, чтобы подвергнуть их непосредственно экспериментальному изучению; наши лаборатории слишком малы для этого. Но **аналогии** с явлениями, доступными экспериментальному исследованию, могут, тем не менее, служить для астронома путеводной нитью. Так, например, Млечный путь представляет собой скопление солнц, движение которых представляется на первый взгляд совершенно капризным. Но нельзя ли сравнить это огромное скопление с молекулами газа, свойства которых развивает (изучает – Н.Н.Б.) кинетическая теория газов? Таким образом, методы физиков могут косвенным путем прийти на помощь астроному» [5, с.286-287].

Далее мы обсудим идею А.Пуанкаре, которая привела, как это ни парадоксально, к открытию явления радиоактивности, за что его соотечественник Анри Беккерель был удостоен Нобелевской премии по физике за 1903 год.

14. Аналогия четырнадцатая: формулировка гипотезы о природе рентгеновских лучей

А.Пуанкаре был одним из первых крупных ученых, узнавших об открытии рентгеновских лучей. Сразу после этого открытия, сделанного немецким физиком Вильгельмом Рентгеном (1895), французский математик внимательно проанализировал его эксперименты, в том числе приборы, применявшиеся при этом. А.Пуанкаре обратил внимание на следующий факт: рентгеновские лучи возникали в том месте катодной трубки, где катодные (электронные) лучи ударялись в стекло. И в этом же месте на стенке катодной трубки возникало светящееся фосфоресцирующее пятно. Другими словами, рентгеновские лучи и фосфоресцирующее пятно образовывались в одном и том же месте прибора, который использовался в экспериментах В.Рентгена. Совпадение (аналогия) рентгеновских лучей и фосфоресцирующего пятна по такому признаку, как место образования, привело А.Пуанкаре к гипотезе о том, что сама фосфоресценция, без катодных лучей, может сопровождаться испусканием лучей Рентгена. Таким образом, аналогия заставила французского математика предположить, что источником рентгеновских лучей может быть любое фосфоресцирующее тело (вещество).

Об этой аналогии пишет В.Азерников в книге «Неслучайные случайности» [34]: «Анри Пуанкаре высказывает… любопытную гипотезу: поскольку X-лучи образуются в том месте трубки, где катодные лучи ударяются в стекло, и поскольку в этом месте на стенке образуется светящееся фосфоресцирующее пятно, то не логично ли сделать вывод отсюда, вопрошает Пуанкаре, что и сама фосфоресценция, без катодных лучей, может сопровождаться испусканием лучей Рентгена?» [34, с.141].

Проверкой этой гипотезы занялся А.Беккерель, который расценил ее как вполне правдоподобную. Он исходил из того, что если предположение А.Пуанкаре подтвердится, то рентгеновские лучи можно будет получать без использования высоковакуумных трубок и источников питания в десятки киловольт, необходимых для этих трубок. Подыскивая материал для опытов, А.Беккерель остановил свой выбор на уранил-калиевом бисульфате – минерале, отличающемся интенсивной люминесценцией. В качестве детектора, фиксирующего излучение, им была использована обычная фотопластинка, изобретенная за 30 лет до этого. А.Беккерель рассчитывал – в полном соответствии с гипотезой А.Пуанкаре – обнаружить испускание рентгеновских лучей в солях урана, помещенных вместе с фотопластинкой на несколько часов на солнечный свет. Но, установив, что соли урана засвечивают фотопластинку без солнечного света (следовательно, фосфоресценция здесь не играет никакой роли), А.Беккерель выяснил, что гипотеза А.Пуанкаре неверна.

Дальнейшие исследования показали, что соли урана самопроизвольно испускают излучение, не связанное с рентгеновскими лучами, и это явление по инициативе Марии Кюри было названо «радиоактивностью». Открытие А.Беккереля совершило революцию в науке, породив на свет ядерную физику со всеми ее техническими приложениями – атомными электростанциями, ядерным оружием и т.д. Как отмечает А.И.Абрамов в монографии «История ядерной физики» [35], «ядерная физика зародилась в самом конце XIX в., когда французский физик Анри Беккерель в 1896 г. открыл новое явление, названное впоследствии радиоактивностью» [35, с.48].

Таким образом, явление радиоактивности было открыто А.Беккерелем в ходе проверки гипотезы А.Пуанкаре об аналогии между рентгеновскими лучами и фосфоресценцией. Хотя эта аналогия оказалась ошибочной, именно она стимулировала опыты А.Беккереля, которые, в свою очередь, стали стартовой точкой для развития ядерной физики. Если вы выдвигаете предположение, которое инициирует серию фундаментальных открытий (даже если впоследствии это предположение не найдет подтверждения), вы можете гордиться такой удачей. На долю А.Пуанкаре, как мы видим, такая удача действительно выпала!

15. Заключение

Ш.Алимбаев в повести «Формула гениальности» [36] пишет: «За всю историю существования человечества люди пытались понять и объяснить величайшие творческие способности гениев. Сотни и тысячи самых больших умов всех времен и народов размышляли над этой проблемой, но так и не смогли решить ее. Несмотря на очень большие, можно сказать, фантастические достижения во всех областях науки, несмотря на великие успехи в освоении космических пространств, проблема таланта и гениальности не только продолжает оставаться наименее изученной областью естествознания, но и белым пятном в самой науке о мозге» [36]. Анализ генезиса научных идей А.Пуанкаре показывает, что он приходил к ним благодаря простым интеллектуальным стратегиям, прежде всего, благодаря аналогии (и, конечно, эмпирической индукции). При разработке теории автоморфных функций он использовал аналогию с теорией эллиптических функций и преобразованиями неевклидовой геометрии. При построении качественной теории дифференциальных уравнений он смело переносил в нее топологические идеи, которые также применял, работая над задачей трех тел. Занимаясь электродинамикой движущихся тел, он распространил в эту область (опять же руководствуясь аналогией) принцип относительности Г.Галилея и «преобразования Лоренца». Обнаружив эквивалентность между математическим описанием динамики молекул в газовой системе и движением звезд в галактиках, он подсказал ученым (Д.Джинсу, А.Эддингтону и др.) способ построения звездной динамики. Аналогия как прием творческого мышления доступна любому человеку, наделенному здоровым мозгом, поэтому нет смысла мистифицировать творчество тех, кого мы называем гениями. В этом, пожалуй, и должно заключаться решение проблемы таланта и гениальности, о которой говорит Ш.Алимбаев в своей книге [36].

Литература:

1. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, 2006. – 464 с.
2. Фрейденталь Г. Пуанкаре и теория автоморфных функций // Пуанкаре А. Избранные труды. Том 3. – М.: «Наука», 1974. - С.687-696.
3. Математика XIX века: чебышевское направление в теории функций, обыкновенные дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, теория конечных разностей. Под ред. А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. – М.: «Наука», 1987. – 318 с.
4. Математика XIX века: геометрия, теория аналитических функций. Под ред. А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. – М.: «Наука», 1981. – 270 с.
5. Пуанкаре А. Наука и метод // Пуанкаре А. О науке. – М.: «Наука», 1983. – С.283-403.
6. Прасолов В.В., Скопенков А.Б. Размышления о признании геометрии Лобачевского // Математическое просвещение. Третья серия. – 2015. - № 19. - С.99-108.
7. Понтрягин Л.С. Жизнеописание. – М.: изд-во «Прима-В», 1998. – 304 с.
8. Винберг Э.Б. О фуксовых функциях // Пуанкаре А. Избранные труды. Том 3. – М.: «Наука», 1974. - С.717-720.
9. Ожигова Е.П. Шарль Эрмит. – Ленинград: «Наука», 1982. – 288 с.
10. Тяпкин А., Шибанов А. Пуанкаре. – М.: «Молодая гвардия», 1982. – 415 с.
11. Зубков А.М. Эйлер и комбинаторика // Современные проблемы математики. Выпуск 11. – М.: МИАН, 2008. – С.5-18.
12. Ричесон Д.С. Жемчужина Эйлера. Формула Эйлера для многогранников и рождение топологии. – М.: ДМК-Пресс, 2021. – 320 с.

13. Стюарт И. Величайшие математические задачи. – М.: «Альпина нон-фикшн», 2015. – 460 с.
14. Новиков С.П. Топология в XX веке: взгляд изнутри // Успехи математических наук. – 2004. - Том 59. - № 5 (359). - С.3-28.
15. Стюарт И. Значимые фигуры. Жизнь и открытия великих математиков. – М.: «Альпина нон-фикшн», 2019. – 446 с.
16. Иcкьердо А. Математика теряет форму. Пуанкаре. Топология. – М.: изд-во «Де Агостини», 2015. – 176 с.
17. Четаев Н.Г. Об одной мысли Пуанкаре // сборник научных трудов Казанского авиационного института. – 1935. - № 3. – С.3-6.
18. Царицанская Ю.Ю. Александр Васильевич Васильев и математика России в конце XIX – начале XX веков // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – М.: МГУ, 2017. – 167 с.
19. Богатов Е.М. О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях // Известия вузов. ПНД. – 2019. – Том 27. - № 1. – С.96-114.
20. Бронштэн В.А. Как движется Луна? – М.: «Наука», 1990. – 208 с.
21. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Пуанкаре А. Избранные труды. Том 1. – М.: «Наука», 1971. – 771 с.
22. Диаку Ф., Холмс Ф. Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 303 с.
23. Алексеев В.М. Комментарии // Пуанкаре А. Избранные труды. Том 1. – М.: «Наука», 1971. – С.752-766.
24. Мадрид К. Бабочка и ураган. Теория хаоса и глобальное потепление. – М.: изд-во «Де Агостини», 2014. – 144 с.
25. Плеснер А.И. Спектральная теория линейных операторов // Успехи математических наук. – 1941. - № 9. – С.3-125.

26. Круликовский Н.Н. Пути развития спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов. – Томск: Томский государственный университет, 2008. – 221 с.
27. Вейль Г. Давид Гильберт и его математическое творчество // Вейль Г. Математическое мышление. – М.: «Наука», 1989. – С.214-256.
28. Люстерник Л.А. Молодость московской математической школы // Успехи математических наук. – 1967. – Том 22. - № 1 (133). – С.137-161.
29. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. – М.: «Наука», 1985. – 379 с.
30. Логунов А.А. Анри Пуанкаре и теория относительности. – М.: «Наука», 2004. – 256 с.
31. Идельсон Н.И. Этюды по истории небесной механики. – М.: «Наука», 1975. – 496 с.
32. Арнольд В.И. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2002. – 104 с.
33. Осипков Л.П. Динамика системы звезд // сборник «Галактики». Под ред. В.Г.Сурдина. – М.: «Физматлит», 2013. – С.47-115.
34. Азерников В. Неслучайные случайности. – М.: «Детгиз», 1972. – 272 с.
35. Абрамов А.И. История ядерной физики. – М.: «КомКнига», 2006. – 232 с.
36. Алимбаев Ш. Формула гениальности. – Алма-Ата: изд-во «Жалын», 1983. – 288 с.