**УДК 167**

***Новиков Н.Б.***
***Институт психологии РАН***
***Россия, г. Москва***

# СИЛА АНАЛОГИЙ. ТВОРЧЕСТВО АНДРЕЯ НИКОЛАЕВИЧА КОЛМОГОРОВА

***Аннотация:*** *Выходец из знаменитой «Лузитании», научной школы Н.Н. Лузина, Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987) отличался универсальным охватом математических предметов, т.е. его работы относились едва ли не ко всей математике. Ему принадлежат яркие достижения в теории вероятностей, теории функций, функциональном анализе, топологии, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, гидродинамике (концепции турбулентности). В молодости он математически доказал истинность законов Г.Менделя, отражающих принципы передачи наследственных признаков от поколения к поколению. В 1960-е годы он предложил алгоритмическую теорию сложности, показав, как можно выразить числом сложность разных объектов. В.И.Арнольд замечает: «А.Н.Колмогоров прожил большую и счастливую жизнь. Колмогоров – Пуанкаре – Гаусс – Эйлер – Ньютон: всего пять таких жизней отделяют нас от истоков нашей науки» [1]. Цель настоящей статьи – показать, что мыслительная операция аналогии была главным орудием, с помощью которого А.Н.Колмогоров генерировал новые идеи.*

***Ключевые слова:*** *новые идеи, математические теории, обнаружение сходства, проведение аналогии.*

***Abstract:*** *Representative of the scientific school N.N. Luzin, Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) was distinguished by a universal coverage of* *mathematical subjects, that is, his works related to almost all of mathematics. He owns outstanding achievements in probability theory, function theory, functional analysis, topology, the theory of differential equations, the theory of dynamical systems, hydrodynamics (the concept of turbulence). At the beginning of his scientific career, he mathematically proved the truth of G. Mendel's laws, reflecting the principles of the transmission of hereditary traits from generation to generation. In the 1960s, he proposed an algorithmic theory of complexity, showing how the complexity of different objects could be quantified. V.I. Arnold notes: "A.N. Kolmogorov lived a great and happy life. Kolmogorov - Poincaré - Gauss - Euler - Newton: only five such lives separate us from the origins of our science" [1]. The purpose of this article is to show that the mental operation of analogy was the main tool with which A.N. Kolmogorov generated new ideas.*

***Key words:*** *new ideas, mathematical theories, discovery of similarities, drawing analogies.*

## 1. Аналогия первая: создание аксиоматической теории вероятностей

Основы математической теории вероятностей были заложены в 1650-х годах французскими математиками Блезом Паскалем и Пьером Ферма, которые нашли правильное решение двух задач, предложенных кавалером де Мере и относящихся к азартным играм. В дальнейшем существенный вклад в эту область математики внесли Х.Гюйгенс, Я.Бернулли, А.Муавр, Ж.Даламбер, П.Лаплас, С.Пуассон, К.Гаусс и многие другие исследователи. Однако теория вероятностей содержала множество необоснованных и часто просто ошибочных утверждений. Подобные ошибки, например, допускали П.Лаплас и С.Пуассон, пытавшиеся применить теорию вероятностей к процессу вынесения судебного решения. Известный британский логик Джон Стюарт Милль (1806-1873) называл эти попытки «математическим скандалом». С.Н.Бернштейн в статье «Петербургская школа теории вероятностей» [2] пишет: «Благодаря влиянию Лапласа первая половина прошлого столетия характеризуется повышенным интересом и увлечением теорией вероятностей, но многие из ее обобщений и приложений были недостаточно обоснованы, и некоторые из них, поддерживаемые даже самим Лапласом и Пуассоном, были столь явно ошибочны, что впоследствии вполне заслуженно квалифицировались Стюартом Миллем как математический скандал. Вследствие этих неудач теории вероятностей на ее новом поприще увлечение сменилось разочарованием и скептицизмом, и во второй половине прошлого столетия среди западноевропейских математиков, за редкими исключениями, господствует мнение, что теория вероятностей представляет не более как своеобразное математическое развлечение, которое не допускает существенных научно-обоснованных приложений и едва ли заслуживает серьезного изучения; даже преподавание ее в университетах Запада почти прекратилось» [2, с.17].

Многие парадоксы (препятствия), затруднявшие рост теории вероятностей, были преодолены отечественными математиками П.Л.Чебышевым, А.А.Марковым, А.М.Ляпуновым. Но теория по-прежнему не имела аксиоматического оформления, и задача разработать аксиоматический фундамент для науки, исследующей случайные явления, выпала на долю А.Н.Колмогорова.

Занимаясь математикой под руководством Н.Н.Лузина, Андрей Николаевич глубоко изучил теорию множеств, метрическую теорию функций, в том числе теорию меры, созданную Анри Лебегом (1875-1941), и его же теорию интеграла. Помимо этого, А.Н.Колмогоров проанализировал ключевые факты и принципы теории вероятностей. А после этого он реализовал фундаментальную аналогию – смелый перенос идей и методов теории множеств и теории функций (прежде всего, теории меры) в науку о случайных событиях. Он обнаружил эквивалентность между основными понятиями теории вероятностей, теории функций (теории меры) и теории множеств, сопоставив каждому понятию из первой области результат (идею) из второй и третьей. В частности, А.Н.Колмогоров показал, что вероятность события аналогична мере множества, а математическое ожидание случайной величины – интегралу от функции. Он также установил, что аналогом закона больших чисел (открытого Я.Бернулли) является понятие сходимости функции по мере, а усиленного закона больших чисел – понятие сходимости функций почти всюду. Стало ясно, что многие свойства независимых случайных величин вполне аналогичны соответствующим свойствам ортогональных функций. Полученные результаты, позволившие аксиоматизировать теорию случайных явлений, были изложены в книге А.Н.Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» (1933), которая произвела большое впечатление на математиков (как отечественных, так и зарубежных).

Л.Е.Майстров в книге «Теория вероятностей. Исторический очерк» [3] пишет: «Колмогоров, в частности, установил, что для независимых одинаково распределенных величин необходимым и достаточным условием для усиленного закона больших чисел так же, как и для простого, является существование математического ожидания. **Аналогии** с теорией множеств в этих исследованиях играли существенную роль. В частности, аналогом закона больших чисел являлось понятие сходимости функции по мере, а усиленного закона больших чисел – понятие сходимости функций почти всюду. Итак, идеи метрической теории функций всё глубже стали проникать в теорию вероятностей. Начиная с середины 20-х годов, Колмогоров занимается логическим оформлением этих новых идей. В результате этих исследований появилась книга «Основные понятия теории вероятностей» (1933 г.). Уже были вскрыты глубокие **аналогии** между понятиями теории вероятностей и понятиями метрической теории функций. Были установлены **аналогии** между мерой множества и вероятностью события, интегралом и математическим ожиданием, ортогональностью функций и независимостью случайных величин и др. Возникла потребность в аксиоматизации теории вероятностей, исходя из теоретико-множественных представлений, что и было выполнено в книге Колмогорова» [3, с.311-312].

Об этом же сообщает Ф.А.Медведев в монографии «Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX-XX вв.» [4]. Раскрывая аналогию А.Н.Колмогорова, автор отмечает: «Как и в случае с функциональным анализом, из теории множеств и функций в теорию вероятностей **переносились** не только общие идеи и методы, но и относительно частные понятия, приемы исследования, техника рассуждений. При этом, если при переносе их в функциональный анализ, как правило, требовалась значительная работа по переосмысливанию, обобщению, учету специфики рассматриваемых функциональных пространств – достаточно напомнить, например, переосмысливание теоремы Больцано-Вейерштрасса, - то в аналогичной работе для теории вероятностей нередко был достаточен простой перевод на другой математический язык. Так, после того, как случайные события были интерпретированы в виде множеств, теоретико-вероятностные понятия несовместимости событий, их одновременной реализации, наступления, по крайней мере, одного события из некоторой их совокупности, противоположного события, невозможного события, превратились соответственно в непересечение множеств, их пересечение, сумму, дополнение множества, его пустоту. Тем самым аппарат основных операций над множествами чуть ли не автоматически превращался в схемы теоретико-вероятностных рассуждений...» [4, с.188].

Наконец, сам А.Н.Колмогоров в предисловии к первому изданию своей книги «Основные понятия теории вероятностей» [5] позволяет нам заглянуть в его творческую лабораторию: «Ведущей мыслью автора было при этом естественное включение основ теории вероятностей, считавшихся еще недавно совершенно своеобразными, в ряд общих понятий современной математики. До возникновения лебеговой теории меры и интеграла эта задача была почти безнадежна. После исследований Лебега стала ясной **аналогия** между мерой множества и вероятностью события, а также между интегралом от функции и математическим ожиданием случайной величины. Эта **аналогия** допускает и дальнейшее продолжение: так, например, многие свойства независимых случайных величин вполне аналогичны соответствующим свойствам ортогональных функций. Для того чтобы, исходя из этой **аналогии**, обосновать теорию вероятностей, следовало еще освободить теорию меры и теорию интегрирования от геометрических элементов, которые еще имелись у Лебега. Это освобождение было осуществлено Фреше» [5, с.5].

Зачастую новая идея (а в данном случае мысль о необходимости переноса понятий и методов из теории функций и множеств в науку о вероятностях) стимулируется информацией, существующей в трудах тех, кто работал над проблемой до тебя. Как правило, эта информация отличается фрагментарностью (неполнотой) и представлена в форме своеобразных «подсказок». Кто же подсказал А.Н.Колмогорову тот путь, по которому следовало двигаться, чтобы достичь аксиоматизации теории вероятностей? Вне всяких сомнений, это сделал французский математик Эмиль Борель (1871-1956), который первым обратил внимание на аналогию между теорией вероятностей и теорией меры.

Е.М.Полищук в книге «Эмиль Борель» [6] констатирует: «…Вклад Бореля в теорию вероятностей весом и своеобразен. Еще в 1905 г. в заметке «О некоторых вопросах теории вероятностей» [93] он первым отметил роль понятия меры и интеграла Лебега в теории случайных величин. Как известно, именно на этом пути через четверть века А.Н.Колмогоровым была построена аксиоматика теории вероятностей» [6, с.93].

Аналогичные сведения можно найти в работе Г.Е.Шевелёва [7], где указывается: «Наиболее перспективным оказался путь, предложенный французским математиком Э.Борелем, который подметил глубокую

**аналогию** между вероятностью и мерой, одним из наиболее важных понятий современной теории функций» [7, с.21].

Построение аксиоматической теории вероятностей, осуществленное А.Н.Колмогоровым, заставляет задуматься о том, что такое аксиоматизация. Будем проводить различие между выводом новых математических утверждений (заключений) внутри уже созданной аксиоматической теории и процессом создания этой аксиоматической теории, т.е. процессом формализации определенной области знаний. Многие специалисты считают, что если основным методом вывода новых заключений внутри аксиоматизированной теории является метод дедукции, то, значит, и при разработке такой формализованной теории основным является тот же метод дедукции. Однако пример А.Н.Колмогорова не согласуется с таким взглядом: он создал аксиоматическую теорию благодаря проведению аналогии между разными математическими концепциями. Этот шаг А.Н.Колмогорова предшествовал всем другим его шагам, которые помогли решить поставленную задачу. Именно аналогия (т.е. перенос знаний из одной области в другую) стала инструментом, посредством которого удалось превратить науку о случайных явлениях в логически строгую дисциплину. К сожалению, этот аспект остался за пределами внимания авторов работы [8].

## 2. Аналогия вторая: вывод дифференциального уравнения, описывающего распространение биологического вида в пространстве биосферы

В 1937 г. А.Н.Колмогоров совместно с И.Г.Петровским и Н.С.Пискуновым задался целью найти математическое уравнение, которое описывало бы процесс роста биологической популяции. Как известно, данный рост сопровождается увеличением области пространства (ареала), которую занимает та или иная группа живых организмов. Другими словами, по мере развития популяции происходит ее экспансия за пределы исходной области обитания. Это заставило А.Н.Колмогорова и его соавторов искать дифференциальное уравнение, которое отражало бы возрастание количества вещества. На одной из стадий поиска ученые поняли, что наиболее подходящим является уравнение диффузии. Именно это уравнение А.Н.Колмогоров и его коллеги перенесли в область описания роста биологической популяции (или, другими словами, распространения биологического вида). Этому переносу способствовало также то, что А.Н.Колмогоров обратил внимание на эквивалентность между экспансией биологического вида и процессом распространения пламени. В дальнейшем эта эквивалентность помогла Я.Б.Зельдовичу и Д.А.Франк-Каменецкому применить уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова (КПП) в теорию горения.

В.М.Тихомиров в книге «Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987): жизнь, преисполненная счастья» [9] пишет: «В 1937 г. А.Н.Колмогоров совместно с И.Г.Петровским и Н.С.Пискуновым публикует статью «Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме». Эта работа дала импульс к развитию разнообразных проблем физики и биологии, в частности теории теплового распространения пламени, начала разработки которой принадлежали Я.Б.Зельдовичу и Д.А.Франк-Каменецкому, теории горения и взрыва, теории распространения нервных импульсов и др. Очень интересно отметить, что здесь, как и в работе с Леонтовичем, Колмогорову принадлежало описание физической (точнее, биологической) модели, а математическая теория была создана, в основном, его соавторами. Колмогоров говорил при этом, что наглядным физическим процессом для описания биологической модели послужило распространение пламени. «Я же видел, как горит бикфордов шнур!» - говорил Андрей Николаевич, и, отправляясь от этого зрительного впечатления, он сформулировал дифференциальное уравнение, решение которого распространяется, сохраняя форму с постоянной скоростью» [9, с.104-105].

Об этой же аналогии А.Н.Колмогорова пишет Г.Ю.Ризниченко в монографии «Математические модели в биофизике и экологии» [10]: «Стремление к росту и размножению ведет к распространению в пространстве, занятию нового ареала, экспансии живых организмов. Жизнь распространяется так же, как пламя по степи во время степного пожара. Эта метафора отражает тот факт, что пожар (в одномерном случае – распространение пламени по бикфордову шнуру) описывается с помощью той же базовой модели, что и распространение вида. Знаменитая в теории горения модель ПКП (Петровского – Колмогорова - Пискунова) впервые была предложена ими в 1937 г. именно в биологической постановке как модель распространения доминирующего вида в пространстве. Все три автора этой работы являются крупнейшими российскими математиками» [10, с.48-49].

Н.Н.Никитенков и Н.А.Никитенкова [11] говорят об уравнении диффузии, которое использовалось А.Н.Колмогоровым и его соавторами: «Эта математическая модель применима для описания многих процессов в физике, химии, биологии, экологии и т.д. Она рассматривалась в 30-е гг. XX века А.Н.Колмогоровым, Н.С.Пискуновым, П.Г.Петровским для моделирования распространения эпидемий, Я.Б.Зельдовичем и Д.А. Франк-Каменецким для моделирования волны горения» [11, с.69].

## 3. Аналогия третья: разработка теории турбулентности

В 1941 г. А.Н.Колмогоров построил теорию однородной и изотропной турбулентности. Одним из ключевых моментов этой теории было предположение о каскадном механизме передачи энергии от одного гидродинамического вихря другому. Поскольку энергия, в основном, передается по цепочке от больших вихрей малым, этот механизм часто называют процессом дробления (измельчения) вихревой структуры турбулентного потока. Андрей Николаевич выдвинул идею, согласно которой в гидродинамической среде, находящейся в турбулентном состоянии, возбуждаются движения (турбулентные пульсации) разных масштабов, причем имеет место перекачка энергии между ними. Эта идея была оформлена математически, и с тех пор о теории турбулентности Колмогорова говорят как о каскадной модели.

Как же отечественный математик пришел к этой модели? По аналогии с исследованиями английского математика Льюиса Фрая Ричардсона (1881-1953), который в 1922 г. постулировал, что в турбулентных потоках мелкие вихри получают энергию в результате последовательного дробления крупных вихрей. Л.Ф.Ричардсон выразил свое представление о турбулентности в четверостишии, дословный перевод которого звучит так:

Большие вихри рождают малые завихрения,
Которые питаются их скоростью.
Малые завихрения порождают еще меньшие,
Пока всё не погубит вязкость [12, с.80].

Следует отметить, что спустя 30 лет, т.е. в 1952 г. тот же Л.Ф.Ричардсон, пытаясь измерить длину береговой Британии, обнаружил ее фрактальные свойства, что явилось одним из отправных пунктов для работ Б.Мандельброта, создавшего знаменитую фрактальную геометрию.

Таким образом, А.Н.Колмогоров (1941), осознав ценность качественного представления Л.Ф.Ричардсона о дроблении вихрей, перенес его в свою количественную теорию турбулентности, изложенную в статье «Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса» [13].

Об источниках теории А.Н.Колмогорова сообщает А.М.Обухов в работе «Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование» [14]: «А.Н.Колмогоров при формулировке основных положений теории локальной структуры развитого турбулентного потока [1] исходил из каскадной модели, содержащей достаточно большое число каскадов – «ярусов», характеризующихся последовательностью масштабов – от больших, сравнимых с поперечным размером системы, до весьма малых – порядка внутреннего масштаба… В чисто качественной форме представление о каскадном механизме преобразования энергии в турбулентной атмосфере было сформулировано еще в 1922 г. известным английским метеорологом Л.Ричардсоном в четверостишии, которое теперь часто цитируется…» [14, с.106].

Этот же вопрос рассматривает П.Г.Фрик в курсе лекций «Турбулентность: модели и подходы» [15]: «…Процессы возбуждения течения, нелинейных взаимодействий вихрей и вязкой диссипации, сосуществующие в физическом пространстве, строго разнесены в пространстве масштабов. Первый шаг в понимании проблемы сделал Л.Ричардсон, который выдвинул в 1922 году идею каскада энергии, то есть процесса передачи энергии по цепочке от больших вихрей – меньшим. Строгую формулировку проблемы, давшую количественные результаты, предложил А.Н.Колмогоров в серии работ 1941 года» [15, с.12].

Аналогичные сведения представлены в публикации С.В.Фортовой «Вихревой каскад неустойчивостей и переход к турбулентности» [16], где автор указывает: «Ричардсоном (смотрите [1]) была предложена концепция энергетического каскада, основанная на идее измельчения вихревой структуры турбулентности до микромасштабов, на которых вязкая диссипация является определяющей. Эта концепция нашла свое отражение в работах Колмогорова и Обухова (смотрите [2], [3]), что привело к известной спектральной структуре энергетического каскада…» [16, с.536].

Нужно сказать, что многие результаты, содержащиеся в теории турбулентности А.Н.Колмогорова, были получены путем анализа экспериментальных данных (то есть индуктивно). Это обстоятельство нашло отражение в значительном числе работ, освещающих его творчество. Я.Г.Синай в статье «Воспоминания об А.Н.Колмогорове» [17] отмечает: «Во время прогулки я стал расспрашивать А.Н. об истории его работ по турбулентности, выполненных перед самой войной. Эти работы пользуются необычайной известностью. Такие понятия, как, например, «колмогоровский спектр», известны сейчас каждому физику. Тем более удивительно, что эти работы были выполнены математиком, значительную часть времени посвятившим себя достаточно отвлеченным разделам этой науки. Ответ Колмогорова меня поразил. Он сказал, что свои законы подобия он вывел, полгода анализируя результаты экспериментов. Тогда его квартира была завалена рулонами бумаги, и он буквально ползал по полу, исследуя их» [17, с.207].

С такой трактовкой генезиса гидродинамических идей А.Н.Колмогорова согласен Г.И.Баренблатт, подчеркивающий [18]: «Андрей Николаевич Колмогоров твердо стоял на позиции, что в отсутствие строгой, замкнутой в себе теории турбулентных жидкостей и газов следует опираться на гипотезы, получаемые из обработки экспериментальных данных» [18, с.45].

## 4. Аналогия четвертая: создание теории устойчивости вполне интегрируемых гамильтоновых систем при малых возмущениях

Приблизительно в 1953 г. А.Н.Колмогоров обнаружил, что при малых возмущениях вполне интегрируемых гамильтоновых систем сохраняются инвариантные торы данных систем. На этом основании он разработал теорию устойчивости для данного класса динамических систем, которая впоследствии была развита его учеником В.И.Арнольдом и американским математиком Юргеном Мозером (1928-1999). Теория получила название «КАМ - теории» (теории Колмогорова – Арнольда - Мозера). Первые результаты, освещающие открытие А.Н.Колмогорова, были изложены им в статье «О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона» [19]. Основная теорема, сформулированная им, - теорема о том, что при малом аналитическом возмущении гамильтоновой системы (специального класса) большинство инвариантных торов не исчезает, а лишь немного деформируется, была доказана В.И.Арнольдом в 1963 г. [20].

Теория устойчивости гамильтоновых систем, построенная А.Н.Колмогоровым, опровергала восходящее к А.Пуанкаре убеждение в том, что при малых возмущениях таких систем их поведение становится хаотическим [21]. Примечательно, что итальянский физик Энрико Ферми, получивший в 1938 г. Нобелевскую премию за открытие «эффекта замедления нейтронов», долгое время пытался усилить теорему А.Пуанкаре об интегралах движения нелинейной гамильтоновой системы. Полагая, что нелинейность гарантированно обусловливает отсутствие инвариантных торов (многообразий) в фазовом пространстве, Э.Ферми совместно с Джоном Пастой и Станиславом Уламом (1954) осуществил компьютерное моделирование вибрирующей струны. Ученые ожидали увидеть эргодическое поведение такой струны, т.е. равномерное распределение энергии по всем модам колебания струны, но обнаружили квазипериодическое движение. Если бы в руках Э.Ферми была теория, построенная А.Н.Колмогоровым, вне всяких сомнений, он (Ферми) имел бы другие ожидания относительно результатов своего компьютерного эксперимента.

Таким образом, теория КАМ опровергала также эргодическую гипотезу, восходящую к Л.Больцману и Д.Гиббсу (1880-е гг.), и квазиэргодическую гипотезу, сформулированную П.Эренфестом (1911). Аргументы, опровергающие квазиэргодическую гипотезу, дополнил также французский математик Мишель Эрман (1942-2000). М.Б.Севрюк в статье «К истории теории КАМ» [22] пишет: «Классические» теоремы теории КАМ о сохранении инвариантных торов, размерность которых равна числу степеней свободы n, опровергают эргодическую гипотезу («движение на каждой гиперповерхности уровня энергии в гамильтоновой системе общего положения эргодично»), а для n = 2 – и квазиэргодическую гипотезу («на каждой гиперповерхности уровня энергии в гамильтоновой системе общего положения есть всюду плотная траектория»). В то же время из теорем о сохранении инвариантных торов размерности больше n вытекает, что квазиэргодическая гипотеза неверна для любого n (Эрман, 1992)» [22, с.291].

Наличие широких связей между теорией КАМ и эргодической теорией, являющейся частью статистической физики, навело В.В.Козлова на мысль, что А.Н.Колмогоров создал эту теорию, руководствуясь вопросами обоснования статистической механики. «Дело в том, - замечает В.В.Козлов,- что статистической механикой активно занимался А.Я.Хинчин, с которым А.Н.Колмогоров начинал свои исследования в области теории вероятностей и математической статистики... Из общения с А.Я.Хинчиным он мог вынести представление о состоянии исследований по статистической теории динамических систем» [23, с.10]. Однако позже В.В.Козлов убедился, что интерес А.Н.Колмогорова к теории возмущений гамильтоновых систем не был связан со статистической механикой: стимулирующим фактором было стремление выяснить поведение большинства траекторий динамических систем (эта проблематика связана с вопросом устойчивости солнечной системы, которым занимался еще П.Лаплас).

Как же А.Н.Колмогоров нашел инвариантные торы, сохраняющиеся при малых возмущениях вполне интегрируемых гамильтоновых систем, т.е. каким образом он получил основополагающий результат, который лег в основу знаменитой теории КАМ? Отечественный ученый имел привычку самостоятельно знакомиться с новыми работами, представленными в различных математических журналах (в отличие от Л.Д.Ландау, который поручал такое «знакомство» своим ученикам, докладывавшим о новых публикациях на физических семинарах). Однажды Андрей Николаевич натолкнулся на статью Л.В.Канторовича, посвященную применению метода

Ньютона (итерационного численного метода нахождения корня (нуля) заданной функции) в функциональном анализе. В этой статье Л.В.Канторович (1948) обобщал метод Ньютона на уравнения в функциональных пространствах, ввиду чего впоследствии данный метод получил название «метода Ньютона - Канторовича». Напомним, что отечественный математик Л.В.Канторович внес значительный вклад в экономическую теорию оптимального распределения ресурсов, создав линейное программирование, за что в 1975 г. удостоен Нобелевской премии по экономике.

Ознакомившись со статьей Л.В.Канторовича, А.Н.Колмогоров обнаружил аналогию между задачей поиска инвариантных торов, которой он занимался, и теми возможностями, которыми обладал метод Ньютона – Канторовича. В частности, он позволял преодолеть расходящиеся ряды, на что не были способны все существовавшие теории возмущений. В результате Андрей Николаевич перенес данный метод в область описания гамильтоновых динамических систем и тем самым сделал важный шаг на пути создания теории КАМ.

В.И.Арнольд в статье «Об А.Н.Колмогорове» [24] раскрывает ход мыслей своего учителя: «Но как найти инвариантный тор в фазовом пространстве неинтегрируемой системы? Естественно начать с теории возмущений, рассмотрев систему, близкую к интегрируемой. Различные варианты теории возмущений многократно обсуждались в небесной механике, а потом – в ранней квантовой механике. Но все эти теории возмущений приводят к расходящимся рядам. Андрей Николаевич понял, что расходимость можно преодолеть, если вместо разложений по степеням малого параметра использовать метод Ньютона в функциональном пространстве (о котором он незадолго до того прочел в статье Л.В.Канторовича «Функциональный анализ и прикладная математика» в «Успехах математических наук»)» [24, с.36].

Об этом же сообщает В.М.Тихомиров в статье «Леонид Витальевич Канторович (к 100-летию со дня рождения)» [25]: «Два результата

Канторовича из прикладного анализа хочу отметить особо. Он получил явные оценки приближений решений уравнения Фредгольма второго рода системами конечномерных уравнений и распространил метод Ньютона на бесконечномерный случай. (Этот метод был, в частности, использован А.Н.Колмогоровым при построении КАМ-теории). По ходу дела Леонид Витальевич описал медленнее сходящийся, но гораздо более удобный с вычислительной точки зрения метод, иногда называемый модифицированным методом Ньютона-Канторовича» [25, с.20].

Приведем еще один источник. Б.Т.Поляк в статье «Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике» [26] пишет об эволюции метода Ньютона: «В 1948 г. Л.В.Канторович опубликовал важную работу [25], где было дано обобщение метода для уравнений в функциональных пространствах (метод Ньютона-Канторовича)» [26, с.49-50]. «Более того, - продолжает автор, - метод Ньютона-Канторовича как способ доказательства существования решения был вскоре использован Колмогоровым, Арнольдом и Мозером [1] при построении знаменитой КАМ-теории в механике» [26, с.51].

Здесь [25] – Канторович Л.В. О методе Ньютона для функциональных уравнений // Доклады АН СССР. – 1948. - Том 59. - № 7. – С.1237-1240.

## 5. Аналогия пятая: решение 13-й проблемы Д.Гильберта

В августе 1900 г. в Париже проходил II Международный конгресс математиков. В работе конгресса приняло участие 226 математиков, в том числе 90 – из Франции, 25 – из Германии, 17 – из США, 9 – из России и т.д. 8 августа на совместном заседании 5-й и 6-й секций Конгресса выдающийся немецкий математик Давид Гильберт прочитал свой доклад «Математические проблемы». В этом докладе он изложил список математических проблем, ожидающих своего решения (список включал 23 вопроса). Д.Гильберт считал, что работа над этими проблемами должна обеспечить дальнейший прогресс математической науки. Здесь он оказался прав: проблемы Д.Гильберта стали актуальными сразу же после его доклада, к их решению были приложены усилия сильнейших математиков мира, а развитие идей, связанных с содержанием указанных проблем, составило значительную часть математики XX века [27].

В списке проблем Д.Гильберта 13-ю строку занимает проблема: доказать, что общее уравнение седьмой степени невозможно решить с помощью каких-либо непрерывных функций, зависящих только от двух аргументов. Другими словами, требовалось продемонстрировать невозможность представить непрерывную функцию $n = 7$ в виде суперпозиции функций двух (или трех) переменных. Формулировка проблемы говорит о том, что Д.Гильберт верил в неразрешимость общего уравнения седьмой степени тем способом, который был описан в его докладе. Однако в данном случае выдающийся геттингенский математик ошибся: А.Н.Колмогоров (1956) показал возможность представления непрерывных функций нескольких переменных суперпозицией функций от трех переменных [28]. А год спустя его ученик В.И.Арнольд улучшил этот результат, обнаружив, что любая непрерывная функция представляется в виде суперпозиции непрерывных функций одного и двух аргументов [29].

Теперь мы должны обратиться к одному из ученых, который был участником атомного проекта в нашей стране, а именно проекта создания термоядерной (водородной) бомбы. Этот ученый вошел в состав коллектива, который должен был произвести математический расчет баланса энергии, выделяющейся при термоядерном синтезе, и энергии, безвозвратно покидающей изделие (бомбу). Создавать изделие определенного вида можно было лишь в том случае, если энергия, образующаяся при термоядерном синтезе, превосходит энергию, «улетающую» из системы. Первым устройством, которое «просчитывалось» (в котором определялся баланс энергии), была «труба», предложенная в 1946 г. Я.Б.Зельдовичем, И.И.Гуревичем и Ю.Б.Харитоном. Именно эту «трубу» просчитывал ученый, о котором нам следует рассказать.

Речь идет об Александре Семеновиче Кронроде (1921-1986), советском математике, который в 1949 г. в стенах МГУ подготовил кандидатскую диссертацию, посвященную теории функций двух переменных. Он создал эту теорию под руководством Н.Н.Лузина и вполне может именоваться одним из представителей «Лузитании» (последним учеником Н.Н.Лузина). Во время защиты диссертации присутствовавшие в качестве оппонентов М.В.Келдыш, А.Н.Колмогоров и Д.Е.Меньшов приняли решение присудить А.С.Кронроду ученую степень доктора физико-математических наук, минуя кандидатскую степень. В то время сильные математики активно привлекались к участию в атомном проекте, и А.С.Кронрод был одним из них.

Б.Л.Иоффе в статье «Кое-что из истории атомного проекта в СССР» [30] пишет: «В группу Померанчука из физиков вошли В.Б.Берестецкий, А.Д.Галанин, А.П.Рудик и я. Математическую часть возглавлял А.С.Кронрод. Математический расчет в этой проблеме был важен и труден: нужно было решить кинетическое уравнение для распределений γ-квантов разных энергий в неоднородной среде при зависящем от энергии и анизотропном рассеянии. Кронрод охотно взялся за решение этой задачи: для него она была своего рода вызовом. И, действительно, он придумал эффективный метод численного решения уравнения Пайерлса путем интегрирования по лучам. В то время никаких ЭВМ не было, и вычислительная техника сводилась к клавишным счетным машинам. М.В.Келдыш, возглавляющий комиссию по математическому обеспечению атомной проблемы, выделил мощное вычислительное бюро Л.В.Канторовича, будущего лауреата Нобелевской премии, в Ленинграде, в котором было около 40 расчетчиц. В решении этой задачи Кронрод проявил высочайший класс и намного превосходил Канторовича. Я неоднократно присутствовал при их обсуждении, и всегда идеи выдвигал Кронрод…» [30, с.72].

Казалось бы, какая связь может существовать между научной деятельностью А.С.Кронрода и решением 13-й проблемы Д.Гильберта? Конечно, на первый взгляд, никакой связи. А.С.Кронрод никогда не занимался этой проблемой. Однако история распорядилась так, что он оказался одним из персонажей, который способствовал ее решению. Примерно в 1956 г. (может быть, чуть раньше) А.Н.Колмогоров по старой привычке, о которой мы уже говорили, листал математический журнал, знакомясь с последними публикациями. И нашел в журнале статью А.С.Кронрода, где рассматривались функциональные деревья (деревья функций). Проводившийся в статье анализ функциональных деревьев ассоциативно напомнил А.Н.Колмогорову содержание 13-й проблемы Д.Гильберта (прекрасный пример важной роли ассоциаций памяти для проведения необходимой аналогии!). Андрей Николаевич заметил аналогию между условиями (требованиями) задачи Д.Гильберта и идеями, представленными в статье А.С.Кронрода. Исходя из этого, А.Н.Колмогоров решил перенести в область решения проблемы Д.Гильберта метод функциональных деревьев А.С.Кронрода. Этот перенос и позволил найти решение общего уравнения седьмой степени, о котором сказано в докладе Д.Гильберта.

А.Г.Витушкин в статье «Полвека – как один день» [31] пишет о том, как А.Н.Колмогоров приблизился к решению 13-й проблемы Гильберта: «Решающим результатом была работа Колмогорова о возможности представления непрерывной функции нескольких переменных суперпозицией функций от трех переменных (1956 г.). Колмогоров рассказывал, что идея конструкции появилась у него, когда он, по привычке просматривать иногда старые журналы, обратил внимание на статью Кронрода, в которой среди прочего рассматривались функциональные деревья. Дерево функции – это пространство компонент ее уровней. Дерево одномерно и ациклично и потому голоморфно укладывается на плоскость. Значения функции естественным образом переносятся на ее дерево, и тем самым функция от многих переменных оказывается в определенном смысле функцией только от двух переменных. При построении суперпозиций потребовалось введение еще одной переменной, тем самым образовались суперпозиции функций от трех переменных» [31, с.197].

Аналогичные сведения можно найти в статье В.И.Арнольда «О представлении функций нескольких переменных…» [32]: «…В области всех непрерывных функций гипотеза Гильберта оказалась неверной. Весной 1956 г. А.Н.Колмогорову удалось показать, что всякая определенная на n-мерном кубе непрерывная функция n переменных, где n≥4, является суперпозицией непрерывных функций трех переменных. Основным орудием в его конструкции является **введенное А.С.Кронродом** [2] одномерное дерево компонент множеств уровня функции. Множеством уровня функции называется совокупность всех точек области определения функции, в которых функция принимает какое-то одно фиксированное значение. Например, если функция точки участка земной поверхности представляет собой высоту этой точки над уровнем моря, то множество уровня будет состоять из всех точек местности, имеющих одну и ту же высоту над уровнем моря; в топографии эти множества уровня называются горизонталями» [32, с.47].

Здесь [2] – Кронрод А.С. О функциях двух переменных // Успехи математических наук. – 1950. – Том 5. - № 1 (35). – С.24-134.

Роль результатов А.С.Кронрода в математическом успехе А.Н.Колмогорова и В.И.Арнольда подчеркивается также в работе В.М.Тихомирова [33]: «Результаты Кронрода сыграли существенную роль при решении А.Н.Колмогоровым и В.И.Арнольдом тринадцатой проблемы Гильберта» [33, с.52-53]. Собственно говоря, и сам Андрей Николаевич не скрывал тех источников, которые дали стимул его исследованию [34]: «…Первым появилось решение проблемы Гильберта, основанное на совершенно других идеях и использующее технику, разработанную А.С.Кронродом. На этом последнем пути я пришел к теореме, составляющей содержание работы, в которой было доказано, что любая непрерывная функция n≥4 переменных представима в виде суперпозиции функций трех переменных» [34, с.444].

Теорема А.Н.Колмогорова о возможности представить любую непрерывную функцию в виде суперпозиции двух переменных неоднократно обобщалась и нашла неожиданное применение в теории искусственных нейронных сетей (технологиях машинного обучения). Многие специалисты в области искусственного интеллекта рассматривают результат А.Н.Колмогорова как математическое обоснование того, что для решения любой (корректно сформулированной) задачи можно построить нейронную сеть.

Впервые теорема Колмогорова – Арнольда использовалась в качестве обоснования возможности построить эффективно действующую нейронную сеть американским ученым Р.Хехт-Нильсеном в 1987-1991 годах. Л.Н.Ясницкий в книге «Интеллектуальные системы» [35] указывает: «В 1987-1991 гг. профессор Калифорнийского университета (США) Р.Хехт-Нильсен [95, 96] переработал теорему Арнольда – Колмогорова применительно к нейронным сетям. Он доказал, что для любого множества различающихся между собой пар векторов произвольной размерности существует двухслойный персептрон с сигмоидными активационными функциями и с конечным числом нейронов, который для каждого входного вектора формирует соответствующий ему выходной вектор. Таким образом, была доказана принципиальная возможность построения нейронной сети, выполняющей преобразование, заданное любым множеством различающихся между собой обучающих примеров, и установлено, что такой универсальной нейронной сетью является двухслойный персептрон – персептрон с одним скрытым слоем, причем активационные функции его нейронов должны быть сигмоидными. Теорема Арнольда – Колмогорова – Хехт-Нильсена имеет очень важное для практики следствие в виде формулы, с помощью которой можно определять необходимое количество синаптических весов нейронной сети…» [35, с.113-114]. «А теперь зададимся вопросом, - продолжает автор, - что было бы, если бы гипотеза 13-й проблемы Гильберта оказалась верной? Очевидно, тогда у нейроинформатики не было бы теоретического фундамента. Ее прикладные возможности были бы серьезно ограничены…» [35, с.114].

## 6. Аналогия шестая: введение понятия энтропии в теорию динамических систем

В 1865 г., обобщая идею Сади Карно о том, что теплота (энергия) не может самопроизвольно переходить от холодного тела к горячему, немецкий физик Рудольф Клаузиус ввел понятие энтропии. Данное понятие обозначало процесс рассеяния энергии, способной совершать работу, т.е. физический процесс, приводящий к выравниванию температур между разными телами. Сформулированный им принцип постоянного роста энтропии стал называться вторым законом термодинамики. Многие специалисты пытались доказать этот принцип методами классической механики. Подобные попытки предпринимал и австрийский физик Людвиг Больцман (1844-1906), но на одном из этапов исследований он понял, что постулат возрастания энтропии имеет статистическую природу. Л.Больцман показал, что единственно возможный способ обосновать его состоит в использовании средств математической теории вероятностей. В результате австрийский физик вывел формулу, связывающую энтропию и вероятность ($S = \ln W$), которая впоследствии была выбита на его надгробной плите.

А в 1948 г. американский математик и инженер Клод Шеннон (1916-2001), разрабатывая теорию связи, предложил измерять количество информации с помощью формулы, совершенно аналогичной формуле энтропии Больцмана. «Адекватным и продуктивным эквивалентом столь сложного и трудно определимого предмета, каковым является информация, оказалась скалярная величина - количество информации об одном случайном (или не полностью заданном) объекте относительно другого такого объекта, или мера неопределенности при наличии неполной информации, или энтропия» [36]. Можно сказать, что формула энтропии Больцмана была перенесена из статистической физики в теорию информации, т.е. был переброшен мост между весьма далекими научными дисциплинами. Одно и то же математическое соотношение успешно «работало» в термодинамике и теории коммуникаций (теории связи).

Рано или поздно с теорией связи К.Шеннона должны были ознакомиться российские (советские) математики. Это произошло в середине 1950-х годов благодаря статьям Александра Яковлевича Хинчина (1894-1959). В частности, А.Я.Хинчин опубликовал следующие работы, раскрывающие смысл теории К.Шеннона: 1) «Понятие энтропии в теории вероятностей» [37]; 2) «Об основных теоремах теории информации» [38].

Эти работы привлекли внимание А.Н.Колмогорова: он понял, что некоторые идеи, содержащиеся в теории информации К.Шеннона, можно перенести в метрическую теорию динамических систем, которой он занимался, когда адаптировал к ней итерационный метод Ньютона – Канторовича для поиска сохраняющихся инвариантных торов (многообразий). В статьях [39], [40] Андрей Николаевич показал, что энтропия, заимствованная из теории связи и перенесенная на динамические системы, является новым (метрическим) инвариантом этих систем. Он назвал этот новый инвариант «энтропией на единицу времени».

Примечательно, что о возможности применения теории информации К.Шеннона в науке о динамических системах догадывался американский ученый Джон фон Нейман (1903-1957) и украинский математик Дамир Зямович Аров (род. 1934 г.), который встречался с А.Н.Колмогоровым и рассказывал ему о своих идеях. Однако фон Нейман и Д.З.Аров не смогли предложить правильную энтропийную теорию динамических систем, поскольку не были знакомы с теорией измеримых разбиений, созданной В.А.Рохлиным. Чтобы использовать энтропию К.Шеннона в теории динамических систем, нужно было опираться на указанную теорию В.А.Рохлина. А.Н.Колмогоров знал об этой концепции В.А.Рохлина, а фон Нейман и Д.З.Аров – нет.

А.М.Вершик в предисловии к книге Н.Мартина и Дж.Ингленда «Математическая теория энтропии» [41] пишет: «Отметим, что после работ Шеннона идея введения энтропии динамических систем высказывалась некоторыми авторами (фон Нейманом по свидетельству С.Какутани, студентом Д.З.Аровым – см. работу А.Н.Колмогорова [69]), однако для проведения ее в жизнь требовался развитый аппарат, который им не был известен и который фактически был использован Колмогоровым. Речь идет о теории измеримых разбиений, разработанной В.А.Рохлиным в 40-х годах. Дело в том, что основным инструментом энтропийной теории является условная энтропия относительно некоторого разбиения, а также последовательности измеримых разбиений; на этом понятии в значительной степени основан технический аппарат и вычисления энтропии» [41, с.7].

Сам Д.З.Аров также отмечает, что в 1956-1957 гг. он не был знаком с теорией измеримых разбиений В.А.Рохлина, что помешало ему разработать адекватную (лишенную ошибок) энтропийную теорию динамических систем. В статье [42] украинский математик рассказывает о своей дипломной работе, в которой он предпринял попытку перенести идеи К.Шеннона в эргодическую теорию: «Что касается истории, то тема дипломной работы по теории информации была предложена А.А.Бобровым (учеником А.Я.Хинчина и А.Н.Колмогорова) после появления работ Хинчина в УМН по теории информации. По счастливому случайному стечению обстоятельств в это время автор прослушал курс лекций Н.И.Гаврилова (ученика И.Г.Петровского) по качественной теории дифференциальных уравнений, включающий, в частности, формулировку теоремы Биркгофа в эргодической теории динамических систем. Знакомство с теорией информации и с понятием эргодической динамической системы привело автора к решению применить шенноновскую энтропию потока к изучению эргодической динамической системы…» [42, с.78]. Автор добавляет: «В то время я не был знаком с понятием пространства Лебега и другими связанными с ним понятиями, такими, как измеримые разбиения…» [42, с.78].

## 7. Аналогия седьмая: создание математической теории сложности (алгоритмической теории информации)

В начале 1960-х годов А.Н.Колмогоров начал искать пути построения теории информации на алгоритмической основе. В статье «Три подхода к определению понятия «количество информации» [43] он указал способ измерения сложности конечного объекта, для чего ввел понятие, называемое сейчас колмогоровской сложностью. В частности, Андрей Николаевич предложил определять сложность объекта как длину кратчайшей программы универсальной машины Тьюринга, способной описать (воспроизвести) этот объект. Иначе говоря, согласно его идее, сложность объекта – это длина его кратчайшего описания. Этот способ измерения сложности он применил для построения алгоритмического варианта теории информации, позволяющего измерять информацию с помощью конечной строки знаков (знаков программы, или алгоритма, упомянутой машины Тьюринга). В 1969 г. А.Н.Колмогоров использовал введенное понятие сложности, чтобы дать определение случайной последовательности символов и научиться отличать такую последовательность от неслучайной (закономерной) последовательности. Он пришел к выводу, что сложность случайной (стохастической) последовательности всегда превосходит сложность ее противоположности – регулярной (упорядоченной) последовательности. Кроме того, Андрей Николаевич отмечал, что естественно рассматривать определение алгоритмической сложности с ограничениями на время работы алгоритма (программы).

Независимо от А.Н.Колмогорова и практически одновременно аналогичные идеи были предложены американским математиком Р.Соломоновым (1926-2009). Он хотел построить «универсальный предсказатель», т.е. меру М с эффективно вычислимыми свойствами, которая предсказывала бы не хуже любой вычислимой меры Р. Как и колмогоровская сложность, универсальный предсказатель Р.Соломонова определялся с использованием универсальной машины Тьюринга, которая строится в теории рекурсивных функций. Американский математик действительно построил универсальную предсказывающую меру, однако она не обладала достаточно вычислимыми свойствами. «Как выяснилось, - пишут авторы статьи [44], - построить предсказатель, который являлся бы одновременно вычислимым и универсальным, невозможно…» [44, с.146]. Те же авторы отмечают, что «идеи универсального предсказания индивидуальной последовательности предвосхитили появившуюся позже, в 1990 годах, «теорию машинного обучения» (Machine Learning), которая имеет более прикладную направленность, чем алгоритмическая случайность» [44, с.146]. Понятие алгоритмической сложности ввел также аргентино-американский математик Грегори Чейтин (Gregory Chaitin).

Как же А.Н.Колмогоров догадался связать сложность объектов с длиной кратчайшей машинной программы, способной описать этот объект? Чисто индуктивно, т.е. используя стандартный прием обобщения, называемый индукцией. Изучая сложность литературных текстов, Андрей Николаевич заметил, что их сложность можно определить через количество шагов алгоритма, предназначенного для полного (исчерпывающего) описания этих текстов. А затем отечественный математик обобщил этот факт, заключив, что такой способ измерения сложности применим не только к литературным текстам, но и к тысячи других объектов.

В.Успенский в очерке [45] пишет: «В начале шестидесятых Колмогоров приступил к созданию последнего из своих математических шедевров – к созданию колмогоровской теории сложности, называемой сейчас теорией колмогоровской сложности. Эта теория позволяет оценивать уровень сложности тех или иных объектов, прежде всего, текстов (т.е. конечных цепочек букв). Колмогорова интересовал, в частности, вопрос о сложности литературных текстов, в том числе о том, какая доля сложности приходится на содержание текста, а какая – на те или иные литературные приемы; литературные же приемы – такие как рифма, метр и т.п. – легче всего формализуются и вычленяются в поэзии» [45]. «Колмогоров был первым, - поясняет автор, - кто предложил мерить сложность вещи числом и указал способ такого измерения: сложность вещи есть длина наиболее короткого ее описания. Как и все гениальные формулировки, эта формулировка кажется очевидной – но лишь после, а никак не до ее провозглашения. <…> Создание теории сложности объектов было последним крупным математическим достижением Колмогорова» [45].

Когда А.Н.Колмогоров нашел способ измерения сложности литературных текстов и других объектов, нетрудно было выявить аналогию между измерением сложности и измерением информации. На основе этой аналогии он принял решение перенести найденный способ определения сложности в теорию информации. Если К.Шеннон определял информацию с помощью формулы, аналогичной формуле энтропии Л.Больцмана, то А.Н.Колмогоров счел целесообразным дополнить подход К.Шеннона алгоритмическим способом измерения. Андрей Николаевич пришел к выводу, что количество информации – это длина кратчайшей программы машины Тьюринга, способной воспроизвести эту информацию. Так возникла алгоритмическая теория информация, одно из последних достижений А.Н.Колмогорова.

Однако следует помнить, что колмогоровская теория сложности не может быть средством точного вычисления информации, содержащейся в том или ином объекте, поскольку инженер, создающий программу для воспроизведения (описания) объекта, должен обладать полным знанием об этом объекте. Но такая ситуация на практике часто является недостижимой (неполнота информации – наш постоянный спутник). Как пишет Ю.И.Манин в книге «Математика как метафора», «колмогоровская сложность является невычислимой функцией» [46, с.44].

Эксперт в области компьютерной и эволюционной биологии Евгений Кунин пытался определить сложность геномов разных организмов с помощью колмогоровской теории сложности, но потерпел неудачу. В книге «Логика случая» [47] он объясняет причину этой неудачи: «Информация эквивалентна колмогоровской сложности только для строго случайных последовательностей с предзаданными частотами символов. Геномные последовательности, как правило, не таковы – они заключают в себе зависимости между нуклеотидами в разных положениях. Несмотря на интуитивную понятность концепции колмогоровской сложности, не существует общей формулы для ее вычисления» [47].

## 8. Аналогия восьмая: формулировка гипотезы о том, что сложность перемножения N-значных чисел пропорциональна $N^2$

В 1956 г. А.Н.Колмогоров высказал гипотезу о том, что сложность перемножения N-значных чисел пропорциональна $N^2$. Другими словами, если каждый из множителей состоит из N цифр, то для их умножения нужно выполнить $N^2$ операций. Другая формулировка гипотезы Андрея Николаевича: нижняя оценка сложности любого метода умножения есть величина порядка $N^2$. В 1960 г. он организовал в МГУ семинар по кибернетике, на первом заседании которого рассказал о своем предположении и поставил задачу доказать его.

Как А.Н.Колмогоров пришел к этой гипотезе? Зная об эффективности обычного умножения чисел «в столбик», применяемого с древнейших времен, он стал рассуждать следующим образом. Поскольку умножение чисел «в столбик» обладает неоспоримыми преимуществами (является достаточно быстрым способом умножения) и используется на протяжении тысяч лет, то вряд ли возможен более быстрый способ умножения. Если гипотетический более быстрый метод умножения не открыт за тысячу лет, то, значит, он не будет открыт и в будущем. Это рассуждение по аналогии и привело Андрея Николаевича к гипотезе, согласно которой обычное умножение в столбик является асимптотически наибыстрейшим способом умножения.

Однако ученик А.Н.Колмогорова Анатолий Алексеевич Карацуба опроверг это предположение, открыв в том же 1960 г. новый и более быстрый метод умножения чисел. Этот результат оказался настолько неожиданным, что на втором заседании упомянутого семинара, посвященного проблеме сложности вычислений, А.Н.Колмогоров объявил о закрытии семинара. Подробное изложение того, как А.А.Карацуба показал ошибочность гипотезы Андрея Николаевича, можно найти в статье [48].

Мы можем сожалеть о том, что в данном случае аналогия, которую использовал выдающийся математик, оказалась неверной (не нашла эмпирического подтверждения). Но сущность творчества как раз в том и заключается, чтобы генерировать идеи, постоянно проверять их на предмет соответствия эмпирическим данным и отбрасывать те из них, которые не выдерживают такой проверки. Ошибочные гипотезы можно рассматривать как пробы (броски в неизвестность), с помощью которых мы постигаем мир. В.И.Арнольд в книге «Что такое математика» [49] отмечает: «Ошибки играют в математике не меньшую роль, чем доказательства: анализируя их причины и пути их преодоления, можно быстрее идти вперед, чем тупо пытаясь продвинуться в малоизученном направлении» [49, с.46].

Страх совершить ошибку является одним из препятствий для продуктивного творчества. Если бы А.Н.Колмогоров, заметив аналогию между понятиями метрической теории функций (теории меры) и понятиями теории вероятностей, не стал бы развивать ее, боясь ошибиться, он никогда бы не смог аксиоматизировать науку о случайных явлениях.

## 9. Заключение

В 1995 г. В.И.Арнольд был избран на должность вице-президента Международного математического союза и разослал крупным математикам письмо с предложением охарактеризовать важные проблемы, которые необходимо будет решать уже в следующем – двадцать первом – столетии. В ответ на это письмо известный американский математик, лауреат премии Филдса за 1966 год, Стивен Смейл (Stephen Smale) подготовил свой список математических проблем, число которых составило 18. Последняя – восемнадцатая проблема – звучит так: каковы пределы интеллекта – как искусственного, так и человека? С.Смейл исходил из того, что один из пределов интеллекта (один из факторов, препятствующих полной формализации творческого мышления) описан в книге Р.Пенроуза «Новый ум короля» [50]. Р.Пенроуз показал, что указанным фактором, затрудняющим формализацию интеллекта, является теорема Геделя о неполноте. Эта теорема, сформулированная австрийским логиком Куртом Геделем в 1931 г., продемонстрировала, что замкнутые алгоритмы (формальные системы), изолированные от опыта и эксперимента, в том числе машинные программы, основанные на этих замкнутых алгоритмах, не способны полноценно воспроизводить творческое мышление. С.Смейл предполагает, что, помимо теоремы Геделя о неполноте, могут быть другие факторы, затрудняющие формализацию интеллекта, и фундаментальная задача состоит в том, чтобы открыть (установить) их.

Проведенный нами анализ математического творчества А.Н.Колмогорова показывает, что искомыми факторами (пределами в интерпретации С.Смейла) являются индукция и аналогия. Эти логические процедуры, помогающие делать научные открытия, при всей своей эффективности, не являются строгими (детерминированными) алгоритмами. Их нельзя формализовать, т.е. наделить качествами, благодаря которым они перестали бы, наряду с правильными результатами, давать ошибочные. Они применяются в условиях неполноты информации, но на переднем крае науки (на границе между известным и неизвестным) невозможно обладать всей полнотой сведений, избавляющей от риска. Как заметил Д.Пойа в книге [51], правдоподобные рассуждения (индукция и аналогия) уступают строгим дедуктивным рассуждениям по своей надежности и неоспоримости, но именно с первыми связано всё новое, что мы узнаем о мире [51, с.14-15].

К числу других факторов, препятствующих полной формализации творческой деятельности, относятся вездесущий метод проб и ошибок (метод последовательного перебора) и фактор случая в научном открытии. Любой исследователь, работающий в неизведанной области, прекрасно осведомлен о том, что в данной области можно продвигаться вперед лишь методом проб и ошибок, время от времени наталкиваясь на случайные открытия. Предсказать эти открытия нельзя, так как нельзя заранее знать, какие сюрпризы готова преподнести природа, которую мы исследуем. Открытие рентгеновских лучей (В.Рентген), радиоактивности (А.Беккерель), микроволнового космического реликтового излучения (А.Пензиас, Р.Вильсон) и т.д. – примеры подобных открытий.

Таким образом, индукция и аналогия, метод проб и ошибок, фактор случая в научном открытии и теорема Геделя о неполноте – реальные аспекты процесса научного познания, затрудняющие полную формализацию этого процесса и позволяющие предложить удовлетворительное решение 18-ой проблемы С.Смейла [52]. Той проблемы, которая была сформулирована в ответ на письмо В.И.Арнольда, одного из лучших учеников А.Н.Колмогорова. Андрей Николаевич (вслед за Ньютоном) всегда высоко оценивал индуктивный метод исследования природы, и этот подход с энтузиазмом воспринял В.И.Арнольд, неоднократно повторявший, что «математика – экспериментальная наука». Мы можем восхититься тем, что индукция и аналогия – вероятностные стратегии, в плодотворности которых был убежден А.Н.Колмогоров, дают решение 18-й проблемы С.Смейла!

## Литература

1. Сосинский А.Б. А.Н.Колмогоров в воспоминаниях учеников // Квант. – 1988. - № 11-12. – С.2-11.

2. Бернштейн С.Н. Петербургская школа теории вероятностей // Природа. – 1939. - № 8. – С.17-22.

3. Майстров Л.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. – М.: «Наука», 1967. – 320 с.

4. Медведев Ф.А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX-XX вв. – М.: «Наука», 1976. – 231 с.

5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: «Наука», 1974. – 120 с.

6. Полищук Е.М. Эмиль Борель. – Ленинград: «Наука», 1980. – 169 с.

7. Шевелёв Г.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – Томск: изд-во Томского политехнического университета, 2019. – 114 с.

8. Ершов Ю.Л., Целищев В.В. Алгоритмы и вычислимость в человеческом познании. – Новосибирск: изд-во СО РАН, 2012. – 504 с.

9. Тихомиров В.М. Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987): жизнь, преисполненная счастья. – М.: «Наука», 2006. – 199 с.

10. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 184 с.

11. Никитенков Н.Н., Никитенкова Н.А. Синергетика для инженеров. – Томск: изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 168 с.

12. Трубецков Д.И. Турбулентность и детерминированный хаос // Соросовский образовательный журнал. – 1998. - № 1. – С.77-83.

13. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады АН СССР. – 1941. – Том 30. - № 4. – С.299-303.

14. Обухов А.М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // Успехи математических наук. – 1983. - Том 38. - № 4 (232). - С.101-111.

15. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Часть 2. – Пермь: Пермский государственный технический университет, 1999. – 136 с.

16. Фортова С.В. Вихревой каскад неустойчивостей и переход к турбулентности // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. - Том 54. - № 3. - С.536-544.

17. Синай Я.Г. Воспоминания об А.Н.Колмогорове // сборник «Колмогоров в воспоминаниях учеников». Под ред. А.Н.Ширяева. – М.: МЦНМО, 2006. – С.205-207.

18. Баренблатт Г.И. Турбулентные пограничные слои при очень больших числах Рейнольдса // Успехи математических наук. – 2004. - Том 59. - № 1 (355). - С.45-62.

19. Колмогоров А.Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Доклады АН СССР. – 1954. – Том 98. - № 4. – С.527-530.

20. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике // Успехи математических наук. – 1963. – Том 18. - № 6 (114). – С.91-192.

21. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. – М.: «Факториал», 1999. – 768 с.

22. Севрюк М.Б. К истории теории КАМ // Нелинейная динамика». – 2016. - Том 12. - № 2. - С.289-293.

23. Козлов В.В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 320 с.

24. Арнольд В.И. Об А.Н.Колмогорове // сборник «Колмогоров в воспоминаниях учеников». Под ред. А.Н.Ширяева. – М.: МЦНМО, 2006. – С.34-53.

25. Тихомиров В.М. Леонид Витальевич Канторович (к 100-летию со дня рождения) // сборник «Историко-математические исследования». – 2014. - № 15 (50). – С.16-24.

26. Поляк Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике // Труды ИСА РАН. – 2006. - Том 28. – С.48-66.

27. Проблемы Гильберта. Под ред. П.С.Александрова. – М.: «Наука», 1969. – 240 с.

28. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Доклады АН СССР. – 1956. – Том 108. - № 2. – С.179-182.

29. Арнольд В.И. О функциях трех переменных // Доклады АН СССР. – 1957. – Том 114. - № 4. – С.679-681.

30. Иоффе Б.Л. Кое-что из истории атомного проекта в СССР // Сибирский физический журнал. – 1995. - № 2. - С.67-87.

31. Витушкин А.Г. Полвека – как один день // Успехи математических наук. – 2002. - Том 57. - № 1 (343). – С.191-206.

32. Арнольд В.И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных // Математическое просвещение. Серия 2. – 1958. - № 3. - С.41-61.

33. Тихомиров В.М. А.С.Кронрод (1921-1986) // Математическое просвещение. Серия 3. – 2002. - № 6. – С.49-54.

34. Колмогоров А.Н. К работам о суперпозициях // Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. – М.: «Наука», 1985. – С.444-445.

35. Ясницкий Л.Н. Интеллектуальные системы. – М.: «Лаборатория знаний», 2016. – 221 с.

36. Вершик А.М. Информация, энтропия, динамика // сборник «Математика XX века. Взгляд из Петербурга». – М.: МЦНМО, 2010. – С.47-76.

37. Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // Успехи математических наук. – 1953. – Том 8. - № 3 (55). – С.3-20.

38. Хинчин А.Я. Об основных теоремах теории информации // Успехи математических наук. – 1956. – Том 11. - № 1. – С.17-75.

39. Колмогоров А.Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и эндоморфизмов пространства Лебега // Доклады АН СССР. – 1958. – Том 119. - № 5. – С.861-864.

40. Колмогоров А.Н. Энтропия на единицу времени как метрический инвариант автоморфизма // Доклады АН СССР. – 1959. – Том 124. - № 4. – С.754-755.

41. Мартин Н., Ингленд Дж. Математическая теория энтропии. – М.: «Мир», 1988. – 350 с.

42. Аров Д.З. К истории возникновения понятия ε-энтропии автоморфизма пространства Лебега и понятия (ε,T)-энтропии динамической

системы с непрерывным временем // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2015. – Том 436. – С.76-100.

43. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. – 1965. – Том 1. - № 1. – С.3-11.

44. Успенский В.А., Вьюгин В.В. Становление алгоритмической информации в России // Информационные процессы. – 2010. – Том 10. - № 2. – С.145-158.

45. Успенский В.А. Предварение для читателей «Нового литературного обозрения» к семиотическим посланиям Андрея Николаевича Колмогорова // Новое литературное обозрение. – 1997. - № 24. – С.122-215.

46. Манин Ю.И. Математика как метафора. – М.: МЦНМО, 2008. – 400 с.

47. Кунин Е. Логика случая. О природе и происхождении биологической эволюции. – М.: «Центрполиграф», 2014. – 527 с.

48. Карацуба А.А. Комментарии к моим работам, написанные мной самим // Современные проблемы математики. – 2013. - № 17. – С.7-29.

49. Арнольд В.И. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2002. – 104 с.

50. Пенроуз Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.

51. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: «Наука», 1975. – 464 с.

52. Смейл С. Математические проблемы следующего столетия // сборник «Современные проблемы хаоса и нелинейности». – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – С.280-303.