УДК 330.45

Иванова Ю.Ю.

Студент

3 курс, Экономический факультет

Стерлитамакский филиал БашГУ

Россия, г. Стерлитамак

Шаймухаметова Д.В., кандидат физико - математических наук

доцент кафедры Математического моделирования

Стерлитамакский филиал БашГУ

Россия, г. Стерлитамак

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Аннотация: *В работе рассмотрено решение транспортной задчи, в частности методы поиска опорного плана: метод «северо-западного угла» и метод «минимального элемента». Также проведен поиск оптимального плана на основе этих рассмотренных методов методом потенциалов. Проведено сравнение методов поиска опорного плана.*

Ключевые слова: *транспортная задача, метод «северо-западного угла», метод «минимального элемента», метод «потенциалов», оптимальный план, опорный план.*

Abstract: *The paper discusses the solution to the transport problem, in particular, the method for finding the support plan: the "north-west corner" method and the "minimal element" method. We also searched for the optimal plan based on the method of potentials on the basis of these methods. Comparison of methods for finding the support plan is made.*

Key words: *transport problem, the "north-west corner" method, the "minimal element" method, the "potential" method, the optimal plan, the support plan.*

Одна из самых распространенных и востребованных оптимизационных задач в логистике – транспортная задача. Она представляет собой задачу поиска оптимального плана перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления, с минимальными затратами на перевозки.

Математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид:

$$Z = \sum \sum X_{ij} C_{ij}, \text{при условиях:}$$

$$\sum X_{ij} = A_i, \qquad i = 1, 2, \ldots m;$$

$$\sum X_{ij} = B_j, \qquad j = 1,2, \ldots n;$$

$$Z \to min$$

где: Z - затраты на перевозку грузов; X - объем груза; C - стоимость (тариф) перевозки единицы груза; A - запас поставщика; B - запрос потребителя; m - число поставщиков; n - число потребителей, i – индекс (счетчик) запасов, j – индекс потребителей.

Стратегия решения транспортной задачи состоит из нахождения опорного и оптимального плана. Существует несколько методов нахождения опорного плана: метод «северо-западного угла», метод «минимального элемента», метод двойного предпочтения, метод Фогеля и т.д. Оптимальный план решения задачи можно найти с помощью симплекс-метода, метода простого перебора, метода потенциалов, метода графов и т.д.

Рассмотрим два метода нахождения опорного плана:

1) Метод «северо-западного угла». Он заключается в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, начиная с левого столбца и верхней строки, и выписывании максимально возможных отгрузок в соответствующие ячейки таблицы так, чтобы не были превышены заявленные в задаче возможности поставщика или потребности потребителя. Цены доставки в данном методе не имеют особого значения, так как в дальнейшем происходит оптимизация отгрузок.

В данном методе рассматривается матрица перевозок D, начиная с левого верхнего угла (клетки). Находится свободная клетка, в нее записывается величина $D_{ij} = \min(A_i, B_j)$. Она вычитается из запасов и потребностей соответствующего склада и магазина. Обнулившаяся строка или столбец исключаются из рассмотрения, затем процесс повторяется для левой верхней клетки оставшейся матрицы до тех пор, пока весь запас товаров не будет исчерпан.

2) Метод «минимального элемента». Отличаясь простотой, данный метод наиболее эффективен по сравнению с методом «северо-западного угла». Кроме того, метод «минимального элемента» понятен и логичен. Его суть заключается в том, что в транспортной таблице сначала заполняются ячейки с наименьшими ценами, а потом уже ячейки с большей стоимостью. То есть мы выбираем перевозки с минимальной стоимостью доставки груза. Это очевидный и логичный ход. Однако, он не всегда приводит к оптимальному плану.

В данном методе рассматривается вся матрица тарифов перевозок, и из нее выбирается клетка с наименьшим значением тарифа C_{ij}, При наличии нескольких клеток с одинаковыми значениями выбирается произвольная. Затем в данную клетку записывается величина $D = \min(A_i, B_j)$. Она вычитается из запасов и потребностей соответствующего склада и магазина. Обнулившаяся строка или столбец исключаются из рассмотрения, затем процесс повторяется для оставшейся части матрицы до тех пор, пока весь запас товаров не будет исчерпан.

Рассмотрим и сравним два способа решения задачи, одно из которых будет построено на основе опорного плана по методу «северо-западного угла», а второе – по методу «минимального элемента».

Требуется составить план перевозок, при котором общая стоимость доставки продукции будет наименьшей. Зададим условия задачи (табл. 1):

Таблица 1.

Постановка задачи

Поставщик	**Потребитель**			**Запасы**
	В1	**В2**	**В3**	
А1	4	2	1	20
А2	2	3	5	30
А3	1	4	3	30
Потребности	15	25	40	80

1) Решение методом «северо-западного угла».

Для решения задачи необходимо выполнение следующего условия: суммарные запасы продукции у поставщиков должны равняться суммарной потребности потребителей. Проверим: запасы поставщиков: 20 + 30 + 30 = 80 единиц продукции; потребность потребителей: 15 + 25 + 40 = 80 единиц продукции. Суммарные запасы продукции у поставщиков равны суммарной потребности потребителей.

Для решения задачи необходимо выполнение следующего условия: количество задействованных маршрутов = количество поставщиков + количество потребителей - 1.

Начинаем заполнять таблицу от левого верхнего угла и постепенно "двигаемся" к правому нижнему (от северо-запада к юго-востоку). Результаты заполнения предоставлены в таблице 2.

Таблица 2.

Решение задачи методом «северо-заподного угла»

Поставщик	**Потребитель**			**Запасы**
	В1	**В2**	**В3**	
А1	**15** 4	**5** 2	0 1	20
А2	0 2	**20** 3	**10** 5	30
А3	0 1	0 4	**30** 3	30
Потребности	15	25	40	80

Далее переходим ко второму этапу решения задачи, т.е. к нахождению оптимального плана методом потенциалов.

Стоимость доставки продукции, для начального решения:

F(x) = 15*4+5*2+20*3+10*5+30*3=270

Далее найдем потенциалы по формуле $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, где $\alpha_i = 0$:

(1;1) $\alpha_1 + \beta_1 = 4 => \beta_1 = 4$,

(1;2) $\alpha_1 + \beta_2 = 2 => \beta_2 = 2$,

(2;2) $\alpha_2 + \beta_2 = 3 => \alpha_2 = 1$,

(2;3) $\alpha_2 + \beta_3 = 5 => \beta_3 = 4$,

(3;3) $\alpha_3 + \beta_3 = 3 => \alpha_3 = -1$.

Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$\Delta 13 = c_{13} - (\alpha_1 + \beta_3) = 1 - (0 + 4) = -4 < 0$,

$\Delta 21 = c_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 2 - (1 + 4) = -3 < 0$,

$\Delta 31 = c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 1 - (-1 + 4) = -2 < 0$,

$\Delta 32 = c_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 4 - (-1 + 2) = 3$,

$\Delta 13, \Delta 21, \Delta 31$ – не удовлетворяет условию $\Delta ij \geq 0$

Для клетки (1;3) - т.к. наименьшее отрицательное, построим означенный цикл, вершины которого будут в точках (1;3), (1;2), (2;2), (2;3), изменим таблицу с учетом данного цикла (табл. 2.1).

Таблица 2.1.

Шаг 1 метода потенциалов

Поставщик	**Потребитель**						**Запасы**
	B1		**B2**		**B3**		
A1	**15**	4	0	2	**5**	1	20
A2	0	2	**25**	3	**5**	5	30
A3	0	1	0	4	**30**	3	30
Потребности	15		25		40		80

Найдем потенциалы для измененной таблицы:

(1;1) $\alpha_1 + \beta_1 = 4 => \beta_1 = 4$,

(1;3) $\alpha_1 + \beta_3 = 1 => \beta_3 = 1$,

(2;3) $\alpha_2 + \beta_3 = 5 => \alpha_2 = 4$,

(2;2) $\alpha_2 + \beta_2 = 3 => \beta_2 = -1$,

(3;3) $\alpha_3 + \beta_3 = 3 => \alpha_3 = 2$.

Вычислим относительные оценки:

$\Delta 12 = c_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 2 - (0 - 1) = 3$,

$\Delta 21 = c_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 2 - (4 + 4) = -6 \ < 0$

$\Delta 31 = c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 1 - (2 + 4) = -5 \ < 0$,

$\Delta 32 = c_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 4 - (2 - 1) = 3$,

$\Delta 31, \Delta 21 -$ не удовлетворяет условию $\Delta ij \geq 0$.

Для клетки (2;1) - т.к. наименьшее отрицательное, построим означенный цикл, вершины которого будут в точках (2;1), (1;1), (1;3), (2;3), изменим таблицу в соответствии с циклом (табл. 2.2).

Таблица 2.2.

Шаг 2 метода потенциалов

Поставщик	**Потребитель**						**Запасы**
	В1		**В2**		**В3**		
А1	**10**	4	0	2	**10**	1	20
А2	**5**	2	**25**	3	0	5	30
А3	0	1	0	4	**30**	3	30
Потребности	15		25		40		80

Найдем потенциалы для измененной таблицы:

(1;1) $\alpha_1 + \beta_1 = 4 => \beta_1 = 4$,

(1;3) $\alpha_1 + \beta_3 = 1 => \beta_3 = 1$,

(2;1) $\alpha_2 + \beta_1 = 2 => \alpha_2 = -2$,

(2;2) $\alpha_2 + \beta_2 = 3 => \beta_2 = 5$, (3;3) $\alpha_3 + \beta_3 = 3 => \alpha_3 = 2.$

Вычислим относительные оценки:

$\Delta 12 = c_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 2 - (0 + 5) = -3 < 0,$

$\Delta 23 = c_{23} - (\alpha_2 + \beta_3) = 5 - (-2 + 1) = 6\,,$

$\Delta 31 = c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 1 - (2 + 4) = -5 \ < 0,$

$\Delta 32 = c_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 4 - (2 + 5) = -3 < 0\,,$

$\Delta 12, \Delta 31, \Delta 32 -$ не удовлетворяет условию $\Delta ij \geq 0$

Для клетки (3;1) - т.к. наименьшее отрицательное, построим означенный цикл, вершины которого будут в точках (3;1), (1;1), (1;3), (3;3), изменим таблицу в соответствии с циклом (табл. 2.3):

Таблица 2.3.

Шаг 3 метода потенциалов

Поставщик	**Потребитель**						**Запасы**
	B1		**B2**		**B3**		
A1	0	4	0	2	**20**	1	20
A2	**5**	2	**25**	3	0	5	30
A3	**10**	1	0	4	**20**	3	30
Потребности	15		25		40		80

Найдем потенциалы для измененной таблицы:

(1;3) $\alpha_1 + \beta_3 = 1 => \beta_3 = 1,$

(3;3) $\alpha_3 + \beta_3 = 3 => \alpha_3 = 2.$

(3;1) $\alpha_3 + \beta_1 = 1 => \beta_1 = -1,$

(2;1) $\alpha_2 + \beta_1 = 2 => \alpha_2 = 3,$

(2;2) $\alpha_2 + \beta_2 = 3 => \beta_2 = 0,$

Вычислим относительные оценки:

$\Delta 11 = c_{11} - (\alpha_1 + \beta_1) = 4 - (0 - 1) = 5,$

$\Delta 12 = c_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 2 - (0 + 0) = 2\,,$

$\Delta 23 = c_{23} - (\alpha_2 + \beta_3) = 5 - (3 + 1) = 1,$

$\Delta 32 = c_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 4 - (2 + 0) = 2$,

Все оценки положительны, найдем F(x):

F(x) = 5*2+10*1+25*3+20*1+20*3=175.

Суммарная стоимость меньше, чем была изначально. Транспортная задача решена, стоимость оптимального плана перевозок составила 175 ден. ед.

Далее решим эту задачу методом «минимального элемента». Опорный план предоставлен в таблице 3.

Таблица 3.

Опорный план методом «минимального элемента»

Поставщик	**Потребитель**						**Запасы**
	B1		**B2**		**B3**		
A1	0	4	0	2	**20**	1	20
A2	**15**	2	**15**	3	0	5	30
A3	0	1	**10**	4	**20**	3	30
Потребности	15		25		40		80

Стоимость доставки продукции, для начального решения:

F(x) = 15*2+15*3+10*4+20*1+20*3=195

Аналогично найдем решение методом потенциалов:

(1;3) $\alpha_1 + \beta_3 = 1 => \beta_3 = 1$,

(3;3) $\alpha_3 + \beta_3 = 3 => \alpha_3 = 2$.

(3;2) $\alpha_3 + \beta_2 = 4 => \beta_2 = 2$,

(2;2) $\alpha_2 + \beta_2 = 3 => \alpha_2 = 1$,

(2;1) $\alpha_2 + \beta_1 = 2 => \beta_1 = 1$,

Вычислим относительные оценки:

$\Delta 11 = c_{11} - (\alpha_1 + \beta_1) = 4 - (0 + 1) = 3$,

$\Delta 12 = c_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 2 - (0 + 2) = 0$,

$\Delta 23 = c_{23} - (\alpha_2 + \beta_3) = 5 - (1 + 1) = 3$,

$\Delta 31 = c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 1 - (2 + 1) = -2 < 0$,

$\Delta 31 -$ не удовлетворяет условию $\Delta ij \geq 0$

Для клетки (3;1) - т.к наименьшее отрицательное, построим означенный цикл, вершины которого будут в точках (3;1), (2;1), (2;2), (3;2), изменим таблицу с учетом данного цикла (табл. 3.1).

Таблица 3.1.

Шаг 1 метода потенциалов

Поставщик	**Потребитель**						**Запасы**
	B1		**B2**		**B3**		
A1	0	4	0	2	**20**	1	20
A2	**5**	2	**25**	3	0	5	30
A3	**10**	1	0	4	**20**	3	30
Потребности	15		25		40		80

Видим, что у нас получилась таблица идентичная той, которую мы получили на последнем этапе решения задачи методом «северо-западного угла» (табл. 2.3). Т.е. F(x)= 175. Задача решена.

Следует отметить, что метод «минимального элемента», как правило, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем стоимость перевозок при плане, найденном для данной задачи с помощью метода северо-западного угла. Поэтому наиболее целесообразно опорный план транспортной задачи находить методом минимальных затрат.

Использованные источники:

1. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.Задачи и методы линейного программирования. Задачи транспортного типа // учебное пособие. Либроком–2015–С.3-5.

2. Ветошкин А.А, Костякова А. И. Транспортная задача. Методы задания базового плана перевозок//Научный журнал.Современные научные исследования и инновации № 2 – 2015 – С.4-8.

3. Маргарян Е. А., Семашко Е.А. Транспортные задачи как инструмент решения логистических проблем предприятия// Научный журнал. Символ науки – 2016 – С.2-4.
4. Султанов Б. М. Применение транспортной задачи при определении оптимального плана перевозок//Научный журнал. Символ науки – 2016 – С.1-6.
5. Шаймухаметова Д.В., Икрамов Р.Д.Информационные системы и технологии в экономике. В сборнике: Российские инициативные разработки (Инициатива. Предприимчивость. Смекалка) Научное издание. Saint-Louis, Missouri, USA, 2017. С. 95-96.