УДК 167

Новиков Н.Б.

Институт психологии РАН

Россия, г. Москва

СИЛА АНАЛОГИЙ. ТВОРЧЕСТВО АЛЕКСАНДРА ГРОТЕНДИКА

Аннотация. *В 1945 году, сразу после окончания войны, Александр Гротендик получил аттестат зрелости и вскоре поступил в университет Монпелье (Франция) на математический факультет. Не зная о результатах Анри Лебега, студент Гротендик самостоятельно разработал теорию интеграла Лебега. Один из преподавателей университета Монпелье отправил его в 1948 году с рекомендательным письмом в Париж к великому Эли Картану. Но так вышло, что он попал не к нему, а к его сыну Анри Картану, который приобщил Гротендика к знаменитому семинару, проводимому группой математиков под псевдонимом «Бурбаки». В этом семинаре, в том числе под руководством Жана Дьедонне, Гротендик понял, что основной способ математического творчества – углубленный анализ эмпирического материала в новых областях, обобщение полученных результатов, выявление скрытых связей (аналогий) между разными математическими теориями. Цель настоящей статьи – проследить, насколько часто Александр Гротендик использовал принцип аналогии при формулировке новых теорем и разработке концепций, существенно раздвинувших границы математического знания.*

Ключевые слова: *новые идеи, математические теории, обнаружение сходства, проведение аналогии.*

Abstract. *In 1945, immediately after the end of the war, Alexander Grothendieck received his matriculation certificate and soon entered the University of Montpellier (France) at the Faculty of Mathematics. Without knowing about the* *results of Henri Lebesgue, the student Grothendieck independently developed the theory of the Lebesgue integral. One of the teachers at the University of Montpellier sent him in 1948 with a letter of recommendation to Paris to the great Elie Cartan. But it so happened that Grothendieck ended up not with him, but with his son Henri Cartan, who introduced Grothendieck to the famous seminar conducted by a group of mathematicians under the pseudonym "Bourbaki". In this seminar, including under the leadership of Jean Dieudonné, Grothendieck realized that the main method of mathematical creativity is an in-depth analysis of empirical material in new areas, generalization of the results obtained, and identification of hidden connections (analogies) between different mathematical theories. The purpose of this article is to trace how often Alexander Grothendieck used the principle of analogy in formulating new theorems and developing concepts that significantly expanded the boundaries of mathematical knowledge.*

Key words: *new ideas, mathematical theories, discovery of similarities, drawing analogies.*

1. Аналогия первая: обобщение теоремы Витольда Шмульяна

Витольд Львович Шмульян (1914-1944) – советский математик, который в 1936 году окончил физико-математическое отделение Одесского университета, после чего поступил в аспирантуру того же университета. Работал над диссертацией под руководством Марка Григорьевича Крейна (1907-1989). Будучи с 1940 года докторантом Математического института имени В.А. Стеклова, в начале Великой отечественной войны ушел в народное ополчение. Командир взвода топографической разведки, а затем топовычислительного взвода дивизиона 969-го артиллерийского полка, старший лейтенант В.Л. Шмульян погиб в 1944 году во время боев за Варшаву. Похоронен в Варшавском предместье Прага – историческом районе польской столицы.

Прежде чем сформулировать теорему В.Л. Шмульяна, которую обобщил А. Гротендик, вкратце обсудим понятие топологического линейного пространства. Как отмечает Д.А. Райков [1], понятие топологического линейного пространства оформилось в 1934-1935 гг. в работах Андрея Николаевича Колмогорова и Джона фон Неймана. Однако у последнего оно было отягчено «условием счетности» - требованием существования счетного семейства окрестностей нуля, пересечение которых содержит только нуль. Это ограничение было связано с тем, что фон Нейман оперировал понятием компактности, а не бикомпактности. Но этот консерватизм имел неожиданный полезный эффект: благодаря ему было привлечено внимание к понятию слабой компактности или слабой секвенциальной компактности [1, с.141]. По Дж. фон Нейману, топологическое линейное пространство называется «топологически полным», если каждое замкнутое вполне ограниченное множество в нем компактно. В.Л. Шмульян внес важный вклад в изучение слабых топологий линейных (прежде всего - нормированных) пространств.

В 1939 г. В.Л. Шмульян установил, что единичный шар в евклидовом пространстве E слабо секвенциально компактен тогда и только тогда, когда E_T топологически полно. Спустя год он распространил этот результат на любые множества, сформулировав теорему: множество $M \subset E$ (относительно) слабо секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно (относительно) слабо компактно [1, с.141]. Первоначально эту теорему В.Л. Шмульяна обобщили Жан Дьедонне (1906-1992) и Лоран Шварц (1915-2002). Ориентируясь на исследования Дьедонне и Шварца как на образец, Александр Гротендик предположил, что аналог теоремы В.Л. Шмульяна должен существовать для случая локально выпуклых пространств, удовлетворяющих условию счетности Джона фон Неймана. Руководствуясь аналогией, Гротендик в 1952 году перенес теорему В.Л. Шмульяна на указанные локально выпуклые пространства.

Д.А. Райков в статье «О работах В.Л. Шмульяна по топологии линейных пространств» [1] пишет о том, как обобщалась теорема В.Л. Шмульяна: «…Теоремы, установленные первоначально для банаховых пространств, **были затем распространены** разными математиками на более широкие классы локально выпуклых пространств. Так, Ж. Дьедонне и Л. Шварц [11] показали, что теорема В.Л. Шмульяна X справедлива в пространствах типа (F) или (LF); **более общий результат** получил затем А. Гротендик [16]: в локально выпуклом пространстве, удовлетворяющем условию счетности фон Неймана, множество (относительно) слабо секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно (относительно) слабо компактно» [1, с.143-144].

Здесь [16] – Grothendieck A. // American Journal of Mathematics. – 1952. – Vol.74. – P.168-186.

2. Аналогия вторая: обобщение теоремы Отто Никодима

Отто Никодим (1887-1974) – польский математик, один из основателей Польского математического общества (1919). Он известен своим вкладом в развитие функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и дескриптивной теории множеств. Никодим был другом и коллегой Стефана Банаха (1892-1945), вместе с которым он основал знаменитую львовскую математическую школу. Значительное влияние на деятельность Никодима и Банаха оказали результаты французского математика Анри Леона Лебега (1875-1941), создателя теории меры и теории интеграла Лебега. Неслучайно Гуго Штейнгауз считает моментом рождения львовской математической школы летний вечер 1916 года, когда он, проходя по одному из бульваров в центре Кракова, услышал разговор Банаха и Никодима, сидевших на скамейке и обсуждавших интеграл Лебега. Знакомство Штейнгауза с молодыми математиками, обсуждавшими на бульваре открытие Лебега, и послужило одним из толчков для появления нового центра творческой активности на «математической» карте Европы начала XX столетия.

В свое время Отто Никодим сформулировал теорему о равномерной ограниченности семейства мер, согласно которой всякое семейство счетно-аддитивных (знакопеременных) функций множества, определенных на δ-алгебре множеств, ограниченное на каждом ее элементе, равномерно ограничено на ней. Другая (эквивалентная) формулировка [2]: если M – семейство конечных счетно аддитивных скалярных мер, определенных на δ-кольце множеств R, поточечно ограниченное, то семейство M равномерно ограниченное. Анализируя теорему Никодима, Александр Гротендик предположил, что должен существовать аналог этой теоремы для семейства ограниченных аддитивных функций множества. Другими словами, Гротендик допустил, что для указанного семейства можно сформулировать результат, аналогичный утверждению Никодима. В итоге в 1953 г. на свет появилось предложенное Гротендиком обобщение теоремы Никодима на случай семейств ограниченных аддитивных функций множества. Впоследствии теорема Никодима обобщалась многими другими (в том числе российскими) математиками.

В.М. Климкин в статье «О некоторых свойствах регулярных функций множества» [3] пишет: «Согласно известной теореме Никодима, всякое семейство счетно-аддитивных (знакопеременных) функций множества, определенных на δ-алгебре множеств, ограниченное на каждом ее элементе, равномерно ограничено на ней. В 1953 году Гротендик показал, что в теореме Никодима требование счетной аддитивности **можно заменить** требованием ограниченности каждой аддитивной функции множества» [3, с.155].

Об этом же сообщается в монографии В.М. Климкина «Избранные главы теории меры» [4]. Автор говорит о теореме Никодима: «Эта теорема, известная в классической теории меры как принцип равномерной ограниченности, **подвергалась обобщениям** в различных направлениях. М.Н. Бобынин [34], по-видимому, первым доказал теорему Никодима, используя только аппарат теории меры. В.Н. Алексюк [9] дал еще одно простое доказательство теоремы Никодима и обобщил ее на семейство непрерывных сверху в нуле треугольных функций множества. A. Grothendieck [121] показал, что теорема Никодима **остается справедливой** для семейства ограниченных аддитивных функций множества» [4, с.16].

Здесь [121] – Grothendieck A. // Canadian Journal of Mathematics. – 1953. – Vol.5. – P.129-173.

3. Аналогия третья: обобщение теорем Стефана Банаха

С 1950 г. А. Гротендик работал во Франции научным сотрудником CNRS (Национального центра научных исследований), но в 1953 году его увольняют из этой государственной организации как человека, не имеющего французского гражданства. Чтобы получить это гражданство, он должен был отслужить в армии, а это противоречило его принципам (он был убежденным пацифистом). И Гротендик отправляется за границу (1953-1956), сначала в Бразилию, затем в США, где после года в университете в Канзасе он стал работать в университете Чикаго. В этом заведении он встретился со своим соотечественником Андре Вейлем (1906-1998). Во время заграничных странствий, работая в области функционального анализа и изучая результаты С. Банаха, Гротендик счел необходимым развить их. В частности, в 1955 году Гротендик по аналогии перенес многие теоремы, сформулированные С. Банахом для линейных операторов, на класс полных пространств (хотя, по мнению специалистов, не совершенно полных). Среди обобщенных результатов – теорема о замкнутом графике, теорема об открытом отображении и т.д. Независимо от А. Гротендика указанные теоремы С. Банаха обобщались усилиями Жана Дьедонне и Лорана Шварца (о которых мы упоминали выше).

В.И. Богачев, О.Г. Смолянов и В.И. Соболев в книге «Топологические векторные пространства и их приложения» [5] пишут: «Внимание многих исследователей было привлечено к **обобщению фундаментальных теорем**, связанных с именем Банаха и относящихся к условиям непрерывности линейных операторов (теоремы о замкнутом графике, обратном операторе, открытом отображении и т.п.). Однако направление обобщений шло по линии свойств типа полноты и категории, смотрите Гротендик [51], Дьедонне, Шварц [59]…» [5, с.546].

Более подробные сведения мы находим в статье Д.А. Райкова «Теоремы об открытом отображении и замкнутом графике» [6], где автор указывает: «В введении к монографии Гротендика [5] доказано следующее **обобщение теорем Банаха** об открытом отображении и замкнутом графике: если E – отделимый непрерывный линейный образ пространства $\mathscr{LF}$, а F – пространство типа (β), то всякое непрерывное линейное отображение E на F открыто, а всякое линейное отображение F в E, имеющее замкнутый график, непрерывно. Пространством типа (β) Гротендик называет отделимое локально выпуклое пространство, являющееся индуктивным пределом (не обязательно счетного) семейства банаховых пространств. Класс пространств типа (β) весьма широк и охватывает, в частности, все применяемые в анализе линейные пространства в их неослабленной топологии. Напротив, непрерывные линейные образы пространств $\mathscr{LF}$ (отделимых индуктивных пределов покрывающих их последовательностей пространств Фреше) образуют значительно более узкий класс, не содержащий некоторых важных пространств функционального анализа, в частности, пространства D «распределений» Л. Шварца. Гротендик высказал предположение, что его теорема при сохранении указанного класса пространств F должна быть справедлива для значительно более широкого класса пространств E…» [6, с.223].

Далее Д.А. Райков сообщает, что ему удалось обобщить теоремы Гротендика об открытом отображении и замкнутом графике (которые, как отмечено выше, сами являются обобщением результатов Банаха): «Эта проблема Гротендика получила недавно положительное решение [2], притом **в усиленной форме** (для многозначных линейных отображений и не обязательно локально выпуклых топологических линейных пространств). Но для распространения теорем об открытом отображении и замкнутом графике на не поддававшиеся еще пространства функционального анализа (вроде D) было бы уже достаточно **обобщения теоремы Гротендика** на замкнутые подпространства произведений счетных семейств указанных в ней пространств E» [6, с.224].

Здесь [2] – Райков Д.А. Двусторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств // Сибирский математический журнал. – 1966. – Том 7. - № 2. – С.353-372.

[5] – Grothendieck A. // Memoirs of the American Mathematical Society. – 1955. – No.16.

4. Аналогия четвертая: перенос понятия ядерного оператора на случай локально выпуклых пространств

А. Гротендик (1955) по аналогии перенес понятие ядерного оператора на случай локально выпуклых пространств. Независимо от него британский математик А.Ф. Растон (A.F. Ruston) перенес понятие ядерного оператора на случай банаховых пространств. Ядерные операторы первоначально появились в теории гильбертовых пространств под наименованием «операторы со следом» (эти операторы нашли применение в математическом аппарате квантовой механики). Перенос указанных операторов из теории гильбертовых пространств в теорию локально выпуклых пространств (а также пространств Банаха) был вполне естественным процессом.

В 5-ом томе книги «Математическая энциклопедия» [7] сообщается: «Ядерный оператор, ядерное отображение, - линейный оператор, отображающий одно локально выпуклое пространство в другое и допускающий специального вида аппроксимацию операторами конечного ранга (т.е. линейными непрерывными операторами с конечномерными образами). Ядерный оператор обладает некоторыми свойствами, присущими конечномерным операторам. В частности, ядерный оператор, отображающий в себя пространство с базисом, имеет конечный след, совпадающий с суммой ряда, составленного из диагональных элементов матрицы этого оператора относительно произвольного базиса. Ядерные операторы и появились первоначально под наименованием «операторов со следом» в математическом аппарате квантовой механики (смотрите [1], [2]). В гильбертовом пространстве операторы со следом взаимно однозначно соответствуют двухвалентным тензорам, и след оператора совпадает с результатом свертки соответствующего тензора. С помощью такого соответствия А. Растон [3] **перенес понятие ядерного оператора** на случай банаховых пространств и независимо А. Гротендик – на случай локально выпуклых пространств в связи с теорией ядерных пространств (смотрите [4], [5])» [7, с.1037].

Здесь [5] – Гротендик А. Теория Фредгольма // Математика. – 1958. – Том 2. - № 5. – С.51-104.

Об этом же сообщает Альбрехт Пич в книге «Операторные идеалы» [8]: «Теория ядерных операторов была создана в 1936 году, когда Муррей и фон Нейман исследовали вопрос о том, какие операторы в гильбертовом пространстве имеют корректно определенный след. В начале пятидесятых годов Гротендик и Растон независимо **распространили это понятие** на случай операторов, действующих в банаховых пространствах» [8, с.279].

5. Аналогия пятая: обобщение теоремы Римана - Роха

Теорема Римана – Роха носит имена двух немецких математиков. Один из них – выдающийся геометр, ученик Карла Гаусса, автор теории бесконечномерных римановых пространств, Бернхард Риман (1826-1866), а второй – его студент Густав Рох (1839-1866). Теорема Римана – Роха позволяет в благоприятных случаях вычислять размерность пространства мероморфных функций на неособой проективной алгебраической кривой, полюсы которых находятся в данных точках и имеют порядки, не превышающие заданных чисел [9]. Впервые указанная теорема появилась в статье Б. Римана «Теория абелевых функций» (1857). Результат Б. Римана был усилен в статье Густава Роха «О числе произвольных констант в алгебраической функции» (1865). В дальнейшем теорема обобщалась многими математиками. Список ученых, усиливавших ее, является достаточно длинным и включает такие имена, как Макс Нетер, Фридрих Карл Шмидт, Андре Вейль, Фридрих Хирцебрух и т.д. Эволюция теоремы от Б. Римана до современных математиков подробно рассмотрена в диссертации А.Л. Смирнова «Теорема Римана – Роха для операций в когомологиях алгебраических многообразий» [10].

Во время пребывания А. Гротендика в США его научные интересы стали постепенно смещаться от функционального анализа к топологии и алгебраической геометрии. Вернувшись во Францию, он впал в тяжелую депрессию (вызванную смертью его матери в 1957 году), но затем возвращается к активной научной деятельности и приглашается на позицию постоянного профессора Института высших научных исследований (IHES), негосударственного физико-математического научного центра. Именно в этот период, ознакомившись с исследованиями Ф. Хирцебруха (1956), который обобщил теорему Римана – Роха на случай многомерных алгебраических многообразий, А. Гротендик задумался над дальнейшим обобщением этой теоремы. Перед ним возник вопрос: в каких математических областях (более широких, чем ситуации, рассмотренные Ф. Хирцебрухом) может существовать аналог результата Римана – Роха? Обладая замечательной математической эрудицией, он нашел такую область. В 1957 г. Гротендик перенес теорему Римана – Роха – Хирцебруха на случай отображений проективных алгебраических многообразий над основным полем произвольной характеристики. Эта находка послужила стимулом для новых исследований (в том числе для работ британца М. Атьи и его коллеги И. Зингера).

Ф. Хирцебрух в предисловии к третьему изданию своей книги «Топологические методы в алгебраической геометрии» [11] указывает: «С одной стороны, Гротендик **обобщил теорему Римана – Роха** для алгебраических многообразий на случай отображений проективных алгебраических многообразий над основным полем произвольной характеристики. С другой стороны, Атья и Зингер доказали теорему об индексе для эллиптических дифференциальных операторов на гладких многообразиях, которая содержит в качестве частного случая теорему Римана – Роха для произвольного компактного комплексного многообразия» (Хирцебрух, 1973, с.9). Автор добавляет: «**Обобщение теоремы** Римана – Роха, принадлежащее Гротендику, существенно опирается на теорию когерентных аналитических пучков над комплексными многообразиями» [11, с.205].

Аналогичные сведения содержатся в статье А.Н. Паршина «Судьба науки (несколько замечаний к несостоявшимся лекциям Ф. Дайсона и И.Р. Шафаревича)» [12]: «Теорема Римана – Роха (до Гротендика) состояла в вычислении когомологий векторных расслоений (более общо пучков) на алгебраическом многообразии. Гротендик предложил **обобщить это утверждение** на случай пары многообразий и отображения между ними. Обычная теорема Римана – Роха получалась из него, когда второе многообразие есть точка, а отображение – единственное имеющееся отображение первого в эту точку» [12, с.101].

6. Аналогия шестая: обобщение теории когомологий когерентных пучков Ж.-П. Серра

Выше мы процитировали Ф. Хирцебруха, который отметил, что предложенное Гротендиком обобщение теоремы Римана – Роха существенно опирается на теорию когерентных пучков над комплексными многообразиями. В связи с этим необходимо хотя бы схематично обрисовать суть теории указанных пучков, в том числе генезис этой математической концепции. После этого мы опишем еще одну аналогию Гротендика, а именно осуществленный им перенос теории когерентных пучков на случай полных многообразий (не обязательно проективных). Эта аналогия и составляет основное содержание настоящего параграфа.

Пучок – структура, используемая для установления отношений между локальными и глобальными свойствами (или характеристиками) некоторого математического объекта. Пучки играют значительную роль в топологии, дифференциальной геометрии и алгебраической геометрии, но также применяются в теории чисел, анализе и теории категорий. Существуют пучки функций, пучки решений дифференциальных уравнений, пучки векторных полей и т.д. Математическую теорию пучков разработал французский математик, лауреат премии Вольфа за 1979 год, Жан Лере (1906-1998). Как пишет К. Узель в работе «Краткий исторический очерк. Возникновение теории пучков» [13], Ж. Лере построил теорию пучков, находясь в качестве военнопленного в концентрационном лагере № 17 в Австрии, где он организовал университет для заключенных. Здесь он прочитал курс алгебраической топологии. Лекции Ж. Лере были опубликованы в конце войны (в 1945 г.) в «Журнале Лиувилля». В дальнейшем, во время чтения лекций в Колледж де Франс в 1947-1950 годах, Ж. Лере дал определение пучка на локально компактном топологическом пространстве.

В 1954 г. французский математик, лауреат премии Филдса, Жан-Пьер Серр, развивая результаты Ж. Лере, положил теорию пучков (точнее, теорию когомологий когерентных алгебраических пучков) в основу построения современной алгебраической геометрии. Напомним, что теория когомологий – раздел математики, который изучает конструкции некоторых топологических инвариантов, называемых группами гомологий и группами когомологий. Теорию когомологий создали независимо друг от друга в 1935-1936 годах три математика: Андрей Николаевич Колмогоров, его соотечественник, выпускник Ленинградского университета, первый аспирант Л.С. Понтрягина, Израиль Исаакович Гордон (1910-1985) и американский математик Джеймс Александер (1888-1971). Соответствующие сведения можно найти в [14].

Итак, Жан-Пьер Серр разработал теорию когомологий когерентных алгебраических пучков, рассматривая ее как основание алгебраической геометрии. Другими словами, после того, как Жан Лере (1950) ввел понятие пучка на топологическом пространстве, Ж.-П. Серр по аналогии пришел к мысли о том, что понятие пучка можно определить и в алгебраической геометрии. Внимательно изучив работы Ж.-П. Серра, А. Гротендик, опять же руководствуясь аналогией, перенес теорию когерентных пучков Ж.-П. Серра на случай полных многообразий (не обязательно проективных). Следует отметить, что американский математик Робин Хартсхорн (род. 1938 г.) перенес теорию пучков Ж.-П. Серра на случай квазипроективных многообразий.

И.В. Долгачев в статье «Абстрактная алгебраическая геометрия» [15] указывает: «В фундаментальной работе [46, 468] Серр включил алгебраические многообразия в общую категорию локально окольцованных пространств и определил для последних понятие когерентного пучка модулей над структурным пучком колец. Им же была развита теория когомологий таких пучков. В случае, когда X – алгебраическое многообразие над полем комплексных чисел C, любой когерентный алгебраический пучок F на X индуцирует на соответствующем аналитическом пространстве X^{an} когерентный аналитический пучок F^{an}. Классические результаты Серра [478] (известные под названием «GAGA») показывают, что для проективных многообразий имеет место канонический изоморфизм пространств когомологий…» [15, с.56]. «Позже, - продолжает автор, - **эти результаты обобщались** Гротендиком [217, 442] на случай полных многообразий (не обязательно проективных) и Хартсхорном на случай квазипроективных многообразий [261, 264]. Теоремы Серра **были перенесены** Гротендиком в формальную геометрию» [15, с.56].

Здесь [46] – Серр Ж.-П. Алгебраические когерентные пучки // сборник «Расслоенные пространства и их приложения». – М.: изд-во иностранной литературы, 1958. – С.372-450.

[217] – Grothendieck A. // Semin. Cartan. – 1956-1957. – No.2. – P.1-16.

7. Аналогия седьмая: обобщение теоремы двойственности Ж.-П. Серра

В 1955 году Жан-Пьер Серр сформулировал теорему двойственности для локально свободных пучков на компактном комплексном многообразии, а также для случая абстрактной алгебраической геометрии. Двойственность Ж.-П. Серра – аналог двойственности Пуанкаре (Анри Пуанкаре сформулировал первоначальный вариант теоремы двойственности без доказательства в 1893 г.). А. Гротендик по аналогии перенес теорему двойственности Ж.-П. Серра на случай произвольных собственных морфизмов – морфизмов схем, отделимых, универсально замкнутых и имеющих конечный тип. Позже теорема двойственности Ж.-П. Серра обобщалась многими другими специалистами, в том числе учеником Гротендика Жаном-Луи Вердье (1935-1989).

Робин Хартсхорн в книге «Алгебраическая геометрия» [16] пишет: «Впервые теорема двойственности была доказана Серром в [2] для локально свободных пучков на компактном комплексном многообразии и в [1] в случае абстрактной алгебраической геометрии. <…> Теорема двойственности и теория вычетов **были обобщены** на случай произвольных собственных морфизмов Гротендиком – смотрите Гротендик [4] и Хартсхорн [2]» [16, с.320]. Автор добавляет: «Теорема двойственности **была обобщена** также на случай собственных морфизмов комплексно-аналитических пространств, смотрите Рами и Руже [1] и Рами, Руже и Вердье [1]. Обобщение на компактные комплексные многообразия смотрите Суоминен [1]. В случае кривых теорема двойственности является наиболее существенным моментом в доказательстве теоремы Римана - Роха» [16, с.320].

Здесь [2] – Serre J.-P. // Comment. Math. Helv. – 1955. – Vol.29. – P.9-26.

[4] – Grothendieck A. // Proc. Inter. Cong. Math. Edinburgh. – 1958. – P.103-118. Имеется русскоязычная версия последней работы: Гротендик А. Теория когомологий абстрактных алгебраических многообразий // Международный математический конгресс в Эдинбурге. – М.: «Физматгиз», 1962. – С.116-137.

8. Аналогия восьмая: перенос теории категорий и функторов Маклейна – Эйленберга в алгебраическую геометрию

Теория категорий и функторов была создана в 1940-х годах американскими математиками Саундерсом Маклейном (1909-2005) и Самуэлем Эйленбергом (1913-1998). Данная теория нашла многочисленные применения в различных разделах математики. Эти применения основаны на том, что в математике изучаются не только свойства элементов объектов, наделенных определенной структурой, но и отображения между этими объектами, согласованные с рассматриваемыми структурами. Теория категорий концентрируется на изучении свойств отображений (морфизмов) между объектами. Язык данной теории – функторы, морфизмы, резольвенты, сопряженные функторы и т.д. Однако важность (значимость) творения С. Маклейна и С. Эйленберга была осознана не сразу. Примечательно, что первая статья данных алгебраистов, посвященная изложению новой теории, была отвергнута редакцией журнала «Annals of Mathematics». Как пишут авторы книги «Наука побеждать в инвестициях…» [17], «многие задачи, которые не получалось решить раньше, стали легко решаемыми после того, как в математике появился новый язык – теория категорий. Забавно, но большинство математиков не помнит сегодня, что, когда в начале 40-х годов XX века авторы теории категорий Сандерс Маклейн и Самуэль Эйленберг (Saunders MacLane и Samuel Eilenberg) принесли статью о вновь созданной дисциплине в серьезнейший математический журнал Annals of Mathematics, ее категорически отвергли, а авторов обругали. Редактор же ожидал увидеть решение еще одной задачи, а не язык, с помощью которого потом будут решены сотни задач» [17].

В аннотации к настоящей статье мы отмечали, что уже на ранних этапах своей научной деятельности А. Гротендик понял, что один из важных механизмов математического творчества – выявление скрытых связей (аналогий) между разными математическими теориями. В 1960 г. Гротендик обнаружил аналогию между аппаратом теории категорий, созданной С. Макклейном и С. Эйленбергом, и задачами алгебраической геометрии. Эта аналогия подтолкнула его к тому, чтобы осуществить перенос идей и методов теории категорий в алгебраическую геометрию. Данный перенос – убедительная иллюстрация упомянутого выше механизма творчества. Вдохновляющим (стимулирующим) фактором был также пример его старшего коллеги Жана-Пьера Серра, который смело переносил в алгебраическую геометрию методы гомологической алгебры (в том числе методы теории пучков).

И.В. Долгачев в статье «Абстрактная алгебраическая геометрия» [15] пишет: «Работа Серра [468] об алгебраических когерентных пучках послужила началом процесса дальнейшей перестройки основ алгебраической геометрии («язык Серра»). В ней были впервые введены в алгебраическую геометрию идеи и методы гомологической алгебры, а также было расширено понятие алгебраического многообразия («алгебраическое пространство» Серра). <…> Наконец, в 1958 г. Гротендик, развивая и обобщая идеи Серра, **ввел в алгебраическую геометрию** язык функторов и теории категорий, а также существенно расширил понятие алгебраического многообразия, положив начало теории схем. Начиная с публикации первых глав фундаментального трактата Гротендика и Дьедонне [240-248], язык теории схем прочно вошел в обиход алгебраических геометров и является сейчас наиболее распространенным и общепринятым» [15, с.48].

Этот же вопрос обсуждает Г.В. Кондратьев в статье «Возможные применения теории категорий в информационных науках» [18]: «Моментом рождения теории категорий считается появление статьи [1]. Главный создатель теории категорий Сандерс Маклейн вспоминал [2, 3], что они с Самуэлем Эйленбергом хотели выразить идею естественного преобразования, для чего необходимо было ввести функторы, которые в свою очередь потребовали введения категории. Категории оказались близкими к теории типов, введенной в конце XIX века Бертраном Расселом и упорно игнорируемой математической общественностью вследствие сложности ее понимания» [18, с.339]. Далее автор сообщает: «В чистой математике теория категорий давно стала стандартным языком и средством развития теорий. Созданная изначально для нужд алгебраической топологии и гомологической алгебры [4, 5], она **была перенесена** Александром Гротендиком (оказавшим огромное влияние на всю математику XX века и создавшим, в частности, теории топосов, расслоенных категорий, мотивов) в алгебраическую геометрию [6] и Уильямом Ловером в основания математики [7, 8, 9]» [18, с.339-340].

9. Аналогия девятая: перенос процедуры склеивания пучков в теорию аффинных схем

Прежде чем раскрыть механизм, посредством которого процедура склеивания пучков была перенесена в математическую теорию схем, разработанную А. Гротендиком, целесообразно вкратце рассказать, как он пришел к идее аффинных схем. Сразу отметим, что независимо от него к этой же идее пришел французский математик Пьер Эмиль Жан Картье (род. 1932 г.), который, к сожалению, не опубликовал своих соображений об аффинных схемах.

Робин Хартсхорн в книге «Алгебраическая геометрия» [16] обсуждает генезис идеи аффинных схем: «Гротендик исходит из наблюдения, что аффинные многообразия соответствуют конечно порожденным целостным алгебрам над полем. Однако почему следует ограничиваться таким специальным классом колец? И он для любого коммутативного кольца A определяет топологическое пространство Spec A и пучок колец на нем, который является **обобщением кольца** регулярных функций на аффинном многообразии, и всё это называет аффинной схемой. Произвольная схема определяется тогда путем склеивания аффинных схем, что является **обобщением понятия** абстрактного многообразия» [16, с.87-88].

Далее мы приведем источник, демонстрирующий, как процедура склеивания пучков была перенесена в теорию схем. Этот источник – рассказ самого А. Гротендика (а также его старшего коллеги Жана Дьедонне) о «секретах» математического творчества. Гротендик откровенно говорит о том, что процедура склеивания применяется во многих областях математики – при построении топологических, дифференциальных, аналитических и других многообразий. Кроме того, Гротендик отмечает заслуги Анри Картана (сына Эли Картана), который впервые установил, что все разнообразные многообразия являются окольцованными пространствами того или иного типа, в связи с чем во всех случаях процедура склеивания сводится к приему склеивания пучков. Рассказ Гротендика не оставляет сомнений в том, что он открыл в теории аффинных (и более абстрактных) схем метод склейки пучков по аналогии с процедурами склейки, применявшимися до него в различных областях математики.

Итак, А. Гротендик и Ж. Дьедонне в статье «Элементы алгебраической топологии» [19] пишут: «Классическое комплексное проективное пространство P^nc получается «склеиванием» (n + 1)-го экземпляра аффинного пространства, скажем, гиперплоскостей $x_j = 1$ в пространстве C^{n+1} $(1 \leq j \leq n + 1)$: две точки этих гиперплоскостей отождествляются, если прямая, соединяющая их в пространстве C^{n+1}, проходит через начало координат. **Аналогичные процессы «склеивания»** встречаются и в других областях математики и притом в гораздо более общем контексте: достаточно указать, например, на топологические, дифференциальные, аналитические и т.д. «многообразия». При всех этих «склеиваниях» критическим моментом является склеивание топологий: после того как топологии склеены, дополнительные строения склеиваются уже автоматически. Причину этого впервые выяснил А. Картан, заметивший, что все разнообразные многообразия являются окольцованными пространствами того или иного типа, так что во всех этих случаях операция «склеивания» сводится к общей операции склеивания пучков. После того как мы свели коммутативную алгебру к теории некоторых специальных окольцованных пространств, нам достаточно применить **общую процедуру склеивания** пучков, чтобы получить, наконец, основное понятие современной алгебраической геометрии – понятие схемы над k: это попросту локально k-окольцованное пространство

X, обладающее покрытием (X_α) открытыми множествами, являющимися (по отношению к индуцированному на них строению окольцованного пространства) аффинными схемами над k» [19, с.147].

Некоторые историки науки сетуют на то, что авторы открытий часто скрывают путь, который привел их к новым результатам. Избегая рассказывать о пробах и ошибках, которые предшествовали открытию, о частных случаях, которые предваряли нахождение общего метода, эти авторы обычно публикуют статьи, не позволяющие понять истинный генезис важного достижения. Как говорил Карл Гаусс, «завершив строительство здания, следует убрать леса». Однако Гротендик никогда не скрывал исходных посылок своих идей. Напротив, он подчеркивал простоту приемов и методов, с помощью которых приходил к этим идеям. Как мы уже неоднократно наблюдали, многие его находки – результат использования принципов обобщения и переноса. Например, в своей автобиографической книге «Урожаи и посевы» [20] Гротендик откровенно пишет, что введенное им понятие схемы – обобщение понятия алгебраического многообразия, соответственно, построенная им математическая теория схем – обобщение теории указанных многообразий: «Понятие схемы представляет собой значительное расширение понятия алгебраического многообразия, и за счет этого полностью обновляет алгебраическую геометрию, завещанную моими предшественниками» [20, с.62]. Гротендик продолжает: «Идея схемы сама по себе – простоты младенческой; такая простенькая, такая скромная, что никому до меня и в голову не пришло за ней так низко нагнуться. И до того даже «дурашливая», признаться, что потом еще несколько лет, очевидности наперекор, для многих моих ученых коллег всё это выглядело воистину «несерьезно»!» [20, с.53].

10. Аналогия десятая: создание теории этальных когомологий

В 1949 году французский математик Андре Вейль сформулировал три следующие гипотезы о локальных дзета-функциях проективных многообразий над конечными полями: 1) предположение о том, что локальные дзета-функции должны быть рациональны; 2) предположение о том, что эти дзета-функции должны удовлетворять функциональному уравнению; 3) предположение о том, что нули этих дзета-функций должны лежать на критических прямых. Первая гипотеза (рациональность локальных дзета-функций) была доказана американским математиком Бернардом Дворком (1923-1998) в 1960 г. Вторая гипотеза доказана Александром Гротендиком в 1965 г., а третья - Пьером Делинем в 1974 г. Следует отметить, что указанные гипотезы А. Вейля возникли на основе аналогии. В частности, А. Вейль обратил внимание на аналогию, существующую между тремя математическими концепциями: теорией чисел, теорией кривых над конечными полями и теорией римановых поверхностей. Например, зная о том, что в теории чисел существует гипотеза Б. Римана о нулях дзета-функции (утверждающая, что все нетривиальные нули дзета-функции лежат на критической прямой и имеют вещественную часть, равную 1/2), А. Вейль по аналогии предположил, что эквивалентное утверждение должно быть справедливо для локальных дзета-функций проективных многообразий над конечными полями.

Аналогия, позволившая А. Вейлю сформулировать три вышеупомянутые гипотезы, подробно рассматривается в книге Э. Френкеля «Любовь и математика» [21]: «…Идея Вейля заключалась в том, что кривые над конечными полями – это объекты-посредники между теорией чисел и римановыми поверхностями. Итак, мы нашли мост – или «вращающийся стол», как называл его Вейль, - между теорией чисел и римановыми поверхностями, и в роли этого моста выступает теория алгебраических кривых над конечными полями. Другими словами, у нас есть три параллельных дорожки или столбца:

Теория чисел	Кривые над конечными полями	Римановы поверхности

Вейль видел следующий вариант использования этого открытия: можно взять любое утверждение в одном из трех столбцов и перевести его на язык утверждений в оставшихся двух. Он писал сестре: «Моя работа заключается в расшифровке текста на трех языках. В каждом из трех столбцов мне доступны лишь разрозненные фрагменты; у меня есть некоторые идеи относительно всех трех языков, но я также знаю, что между утверждениями в разных столбцах могут существовать огромные различия, о которых невозможно догадаться заранее. За те несколько лет, что я посвятил работе над ними, я нашел лишь несколько фрагментов словаря» [21, с.134].

Часто специалисты говорят, что правильно поставленный вопрос – это уже половина решения. Сформулировав свои гипотезы, А. Вейль поставил вопрос о разработке новой теории когомологий, которая впоследствии получила название «теории этальных когомологий». А. Вейль также отметил, что эту новую теорию когомологий, которая позволит доказать его гипотезы, следует строить по аналогии (по образцу) с обычной теорией когомологий многообразий, уже существовавшей к тому времени. Этот проект А. Вейля и реализовал А. Гротендик. Другими словами, Гротендик разработал теорию этальных когомологий (когомологий для абстрактных многообразий) по аналогии с теорией когомологий для обычных многообразий.

Робин Хартсхорн в книге «Алгебраическая геометрия» [16] повествует: «В 1949 г. Андре Вейль [4] сформулировал свои знаменитые гипотезы, касающиеся числа решений полиномиальных уравнений над конечными полями. Эти гипотезы устанавливают глубокую связь между арифметикой алгебраических многообразий, определенных над конечными полями, и топологией алгебраических многообразий над полем комплексных чисел. Вейль указал также на то, что если бы существовала подходящая теория когомологий для абстрактных многообразий, **аналогичная обычной теории** когомологий многообразий, определенных над C, то можно было бы вывести его гипотезы из стандартных свойств соответствующей когомологической теории. Это наблюдение было одним из главных поводов для поиска и построения различных когомологических теорий в абстрактной алгебраической геометрии. В 1963 г. Гротендик уже мог показать, что его теория L-адических когомологий обладает достаточным запасом свойств для доказательства части гипотез Вейля (рациональность дзета-функции). Доказательство оставшихся гипотез Вейля (аналога гипотезы Римана), данное Делинем [3] в 1973 г., может рассматриваться как кульминационный момент изучения L-адических когомологий, начатого Гротендиком…» [16, с.559].

Далее Р. Хартсхорн детализирует аналогию А. Гротендика: «Первыми когомологиями, введенными в абстрактную алгебраическую геометрию, были когомологии когерентных алгебраических пучков, как их определил Серр [3]. Хотя они не могли удовлетворять изложенным выше требованиям, поскольку их коэффициенты принадлежали полю определения многообразия, они **служили основой** для построения последующих когомологических теорий. Серр [6] предложил теорию когомологий с коэффициентами в пучках векторов Витта, но не мог извлечь из нее ничего существенного. Гротендик, **вдохновляясь некоторыми идеями** Серра, заметил, что можно получить хорошую теорию когомологий, рассматривая многообразие вместе со всеми его неразветвленными накрытиями. Это послужило началом его теории этальной топологии, развитой совместно с М. Артином, которую он использовал для определения L-адических когомологий» [16, с.562].

Можно также сослаться на монографию Джеймса Милна «Этальные когомологии» [22], где автор указывает: «Понятие этальной топологии первоначально было введено А. Гротендиком и развито им совместно с М. Артином и Ж.-Л. Вердье для обоснования идеи Вейля [131], которая состоит в том, что для полиномиальной системы уравнений с целыми коэффициентами имеется **глубокая связь** между комплексной топологией множества комплексных решений данной системы и числом решений данной системы по модулю простого числа. Здесь этальная топология добилась блестящих успехов» [22, с.7].

Помимо всего прочего, А. Гротендик опирался на аналогию между группой Галуа и фундаментальной группой алгебраического многообразия, а также между накрытием топологического пространства и конечным расширением полей. М.С. Вербицкий в книге «Начальный курс топологии в листочках: задачи и теоремы» [23] пишет: «Дело в том, что группа Галуа устроена аналогично фундаментальной группе, а накрытие топологического пространства – конечному расширению полей. **Пользуясь этой аналогией**, Гротендик построил фундаментальную группу, пользуясь только алгебраическими методами (этот раздел математики называется этальной геометрией). В.И. Арнольд прочел основанный **на этой аналогии** курс теории Галуа в физико-математической школе-интернате № 18; впоследствии его лекции были записаны В.Б. Алексеевым («Теорема Абеля в задачах и решениях»)» [23, с.12].

Автор продолжает: «Наука о накрытиях Галуа **весьма похожа** на теорию Галуа алгебраических расширений полей. Это не случайно. В алгебраической геометрии методы топологии и дифференциальной геометрии применяются к объектам алгебраической и теоретико-числовой природы. А. Гротендик определил фундаментальную группу алгебраического многообразия таким образом, что группа Галуа и фундаментальная группа топологического пространства оказались частными случаями более общей конструкции. При изучении накрытий и расширений полей, а также фундаментальной группы и группы Галуа очень полезно держать в голове, что это **похожие вещи**» [23, с.125].

Впоследствии математики (Владимир Игоревич Арнольд, Эдвард Виттен и др.) открыли еще одну аналогию, позволяющую строить различные теории когомологий алгебраических многообразий. Эта аналогия основана на соответствии между дифференциалом де Рама и дифференциалом Дольбо.

С.О. Горчинский в диссертации «Вычеты и символы в K-теории и группы Чжоу» [24] сообщает: «При построении различных теорий когомологий алгебраических многообразий один из возможных подходов заключается в **следующей аналогии** с сингулярными гомологиями вещественных многообразий, которая рассматривалась многими авторами, включая Арнольда, Виттена [148], Дональдсона - Томаса [35], Френкеля - Хесина [39] и Рослого - Хесина [76], [77]. **Аналогия основана** на словаре между вещественными и комплексными многообразиями, отправной точкой которого является соответствие между дифференциалом де Рама и дифференциалом Дольбо. При этом когомологии де Рама плоских расслоений на вещественных многообразиях соответствуют когомологиям Дольбо голоморфных расслоений на комплексных многообразиях. Для вещественных многообразий теорема де Рама сравнивает когомологии де Рама и сингулярные когомологии» [24, с.5-6].

11. Аналогия одиннадцатая: построение математической теории «детских рисунков»

В 1984 году А. Гротендик подал заявление на исследовательскую позицию в лаборатории CNRS в Монпелье, но получил отказ, мотивированный тем, что у него не было публикаций за предшествующее десятилетие. После вмешательства математической общественности, которая была возмущена этим отказом, Гротендику (в виде исключения) разрешили вместо списка трудов последних лет представить проект исследований на ближайшие годы. И он такой проект написал (42-страничный текст под названием «Эскиз программы»). В этом проекте Гротендик совершил неожиданный переход от абстрактных алгебраических построений к наглядным геометрическим образам, а именно к изучению римановых поверхностей (комплексных алгебраических кривых). Центральной идеей этих новых исследований оказалось понятие «детские рисунки». Как поясняет А.Б. Сосинский [25], «детский рисунок – это прообраз при разветвленном накрытии линий разреза, по которым строится данная риманова поверхность» [25, с.78]. «…Понятие детского рисунка оказалось наиболее востребованным и породило огромный поток публикаций в России и за рубежом» [25, с.78].

Но для окончательного построения теории детских рисунков не хватало способа наглядного описания всех кривых над числовыми полями с помощью вложенных графов, разбивающих компактные ориентированные поверхности на клетки. Где найти этот способ? Нужна была подсказка, которая, как правило, является запускающим (инициирующим) механизмом для проведения аналогии, то есть для переноса определенной идеи из одной области в другую. Историкам науки известно множество случаев, когда какая-то (иногда случайная) ситуация выступала в роли подобного инициирующего механизма. Вот, например, как А.А. Ивин в книге «Логика» [26] описывает одно из изобретений американского инженера и промышленника Джорджа Вестингауза (1846-1914): «Вестингауз долго бился над проблемой создания тормозов, которые одновременно действовали бы по всей длине поезда. Прочитав случайно в журнале, что на строительстве тоннеля в Швейцарии буровая установка приводится в движение сжатым воздухом, передаваемым от компрессора с помощью длинного шланга, Вестингауз увидел в этом ключ к решению своей проблемы» [26, с.220].

В биографии А. Гротендика решающую роль сыграла не случайно прочитанная заметка в журнале, а встреча с Пьером Делинем, который рассказал ему об открытии российского математика, ученика И.Р. Шафаревича, Геннадия Владимировича Белого (1951-2001). Г.Н. Белый установил следующий неожиданный факт, который в настоящее время называется «фундаментальным утверждением в алгебраической геометрии»: любая неособая алгебраическая кривая C, определенная алгебраическими коэффициентами, представляет компактную риманову поверхность, которая является разветвленным покрытием сферы Римана с ветвлением лишь в трех точках. Именно этот факт (эта теорема) и дала А. Гротендику ключ к решению: он по аналогии перенес данный результат в свою теорию детских рисунков для наглядного описания всех кривых над числовыми полями с помощью вложенных графов.

В.С. Куликов и Г.Б. Шабат в статье «Игорь Ростиславович Шафаревич – великий математик и учитель» [27] пишут: «В связи с теорией Галуа в школе Шафаревича произошло еще одно весьма важное событие, сыгравшее важную роль в математической жизни одного из авторов (ГШ). А именно, ученик Шафаревича Г.В. Белый в работе [22], посвященной реализации некоторых серий групп Шевалле как групп Галуа расширений некоторых групповых полей, в качестве вспомогательной леммы привел замечательный критерий определяемости алгебраической кривой над полем алгебраических чисел: определенная над C алгебраическая кривая имеет модель над Q тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде накрытия проективной прямой, разветвленного всего в трех точках. Этот результат произвел сильнейшее впечатление на А. Гротендика, который **использовал его для наглядного описания** всех кривых над числовыми полями с помощью вложенных графов, разбивающих компактные ориентированные поверхности на клетки. В «самиздатской» работе [39] Гротендик назвал такие графы детскими рисунками; разумеется, такие объекты под несколькими другими названиями изучались и до него, но Гротендик обнаружил совершенно неожиданную связь между арифметико-геометрическими и комбинаторнотопологическими объектами – точнее, эквивалентность подходящим образом определенных категорий. Эта эквивалентность определяет действие абсолютной группы Галуа Aut (Q) на детских рисунках и, таким образом, дает уникальную возможность визуализации абсолютной группы Галуа» [27, с.48-49].

Здесь [22] – Белый Г.В. О расширениях Галуа максимального кругового поля // Известия АН СССР. Серия «Математическая». – 1979. – Том 43. - № 2. – С.267-276.

[39] – Geometric Galois actions. I. Around Grothendieck’s Esquisse d’un Programme. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.

12. Заключение

В 1758 году выдающийся французский философ Клод Адриан Гельвеций (1715-1771) опубликовал трактат «Об уме», в котором сформулировал концепцию о средовой обусловленности таланта, о том, что талант и гениальность – результат воспитания и образования, а не совокупность качеств, которые являются врожденными и передаются по наследству. Гельвеций привел ряд аргументов в пользу того, что умственное неравенство между людьми (то есть различие их интеллектуальных способностей) следует объяснять социальными факторами, которые включают в себя самые разные обстоятельства (в том числе случайные). Гельвеций [28] говорит: «Наблюдаемое в людях значительное умственное неравенство зависит исключительно от различия в их воспитании и от скрытого от нас и многообразного сплетения обстоятельств, в которых они находятся» [28, с.455]. «Ясно поэтому, что умственное неравенство, наблюдаемое в людях, в среднем нормально организованных, нисколько не зависит от большего или меньшего превосходства их организации, но от различного воспитания, различных условий, в которые они поставлены…» [28, с.456].

Решающая роль средовых условий в формировании гения иллюстрируется французским философом следующим образом: «Почему великий человек обладает гениальностью лишь в той области, которую он долгое время изучал? Разве не видно из этого, что если он не обладает превосходством в других областях, то, значит, он и не имеет другого преимущества над остальными людьми, кроме привычки к прилежанию и научных методов?» [28, с.477]. «Вот почему знаменитый поэт может быть плохим философом и превосходный философ посредственным поэтом; вот почему романист может плохо писать историю, а историк плохо сочинять романы» [28, с.487].

В трактате «О человеке» (1772) Гельвеций развивает свои представления о гениальности, подчеркивая, что, если обычные люди способны понять научные открытия, сделанные другими, значит, они могли бы и самостоятельно прийти к этим открытиям. Кроме того, французский мыслитель убежден, что обычных свойств ума, памяти и органов чувств (зрения, слуха и т.д.) вполне достаточно для успешного творчества в той или иной сфере деятельности. «…Человеческий ум – безразлично, следит ли он за доказательством какой-нибудь истины или сам открывает ее, - должен в обоих случаях сравнивать одни и те же предметы, наблюдать одни и те же отношения, наконец, производить одни и те же операции. Следовательно, ума, необходимого для постижения уже известных истин, достаточно для того, чтобы прийти и к неизвестным истинам» [29, с.153-154]. «…Для чего нужна обширная память? Для потребностей великого человека достаточно самой обыкновенной памяти» [29, с.104]. «…Все люди имеют от природы больше памяти, чем это требуется для открытия величайших истин» [29, с.105]. «Как бы ни вопрошать опыт, он всегда ответит, что большее или меньшее умственное превосходство не зависит от большего или меньшего совершенства органов чувств, и что все люди с обычной, нормальной организацией одарены от природы тонкостью чувств, необходимой для того, чтобы подняться до величайших открытий в математике, химии, политике, физике и т.д.» [29, с.107].

Можно ли согласиться с этими утверждениями Гельвеция? Ответ положительный. Анализ генезиса научных идей А. Гротендика показывает, что он приходил к ним благодаря использованию простых интеллектуальных стратегий, прежде всего, благодаря аналогии (и, конечно, эмпирической индукции). При обобщении теоремы В.Л. Шмульяна на случай локально выпуклых пространств он исходил из предположения, что в этих пространствах должен существовать аналог указанной теоремы. Иначе говоря, руководствуясь аналогией, он переносил конкретное математическое утверждение из одной области в другую. Точно так же он поступал, когда обобщал теорему Отто Никодима о равномерной ограниченности семейства мер, теорему Стефана Банаха о замкнутом графике и открытом отображении, принцип двойственности Ж.П. Серра и т.д. Хорошая математическая эрудиция, приобретенная в ходе самостоятельного изучения различных математических дисциплин, позволила Гротендику обнаружить аналогию между теорией категорий Маклейна – Эйленберга и алгебраической геометрией и разработать аппарат, излагающий последнюю дисциплину на языке функторов и морфизмов. Знакомство с открытием российского математика Г.В. Белого подсказало ему (опять же по аналогии) способ построения математической теории детских рисунков. Индукция и аналогия как процедуры творческого мышления доступны любому человеку, наделенному здоровым мозгом, и это является убедительным свидетельством справедливости мысли Гельвеция о том, что «ума, необходимого для постижения уже известных истин, достаточно для того, чтобы прийти и к неизвестным истинам».

Литература

1. Райков Д.А. О работах В.Л. Шмульяна по топологии линейных пространств // Успехи математических наук. – 1965. - Том 20. - № 2. - С.135-147.

2. Саженков А.Н. Принцип ограниченности для мер // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 1984. – 63 с.

3. Климкин В.М. О некоторых свойствах регулярных функций множества // Математический сборник. – 1992. - Том 183. - № 6. - С.155-176.

4. Климкин В.М. Избранные главы теории меры. – Самара: изд-во «Универс групп», 2010. – 140 с.

5. Богачев В.И., Смолянов О.Г., Соболев В.И. Топологические векторные пространства и их приложения. - Москва-Ижевск: НИЦ РХД, 2012. – 584 с.

6. Райков Д.А. Теоремы об открытом отображении и замкнутом графике // приложение к книге: Робертсон А.П., Робертсон В.Д. Топологические векторные пространства. – М.: «Мир», 1967. - С.223-237.

7. Математическая энциклопедия. Том 5. Под ред. И.М. Виноградова. – М.: «Советская энциклопедия», 1984. – 1248 с.

8. Пич А. Операторные идеалы. – М.: «Мир», 1982. – 536 с.

9. Венков Б.Б. Предисловие // Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. – М.: «Мир», 1973. – С.5-6.

10. Смирнов А.Л. Теорема Римана – Роха для операций в когомологиях алгебраических многообразий // Диссертация на соискание доктора физико-математических наук. – СПб.: СПбГУ, 2006. – 110 с.

11. Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. – М.: «Мир», 1973. – 280 с.

12. Паршин А.Н. Судьба науки (несколько замечаний к несостоявшимся лекциям Ф. Дайсона и И.Р. Шафаревича) // Вопросы философии. – 2019. - № 9. - С.98-107.

13. Узель К. Краткий исторический очерк. Возникновение теории пучков // Касивара М., Шапира П. Пучки на многообразиях. – М.: «Мир», 1997. - С.42-63.
14. Полотовский Г.М. Очерки истории российской математики. - Нижний Новгород: изд-во Нижегородского университета, 2015. – 320 с.
15. Долгачев И.В. Абстрактная алгебраическая геометрия // сборник «Итоги науки и техники». Серия «Алгебра, топология, геометрия». – 1972. - Том 10. - С.47-112.
16. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. – М.: «Мир», 1981. – 599 с.
17. Шнейдер А., Кацман Я., Топчишвили Г. Наука побеждать в инвестициях, менеджменте и маркетинге. – М.: изд-во «АСТ», 2002. – 235 с.
18. Кондратьев Г.В. Возможные применения теории категорий в информационных науках // Труды Нижегородского государственного технического университета имени Р.Е. Алексеева. – 2013. - № 2 (99). - С.339-345.
19. Гротендик А., Дьедонне Ж. Элементы алгебраической топологии // Успехи математических наук. – 1972. - Том 27. - № 2. - С.135-148.
20. Гротендик А. Урожаи и посевы: размышления о прошлом математики. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 288 с.
21. Френкель Э. Любовь и математика. Сердце скрытой реальности. - СПб.: «Питер», 2015. – 352 с.
22. Милн Дж. Этальные когомологии. – М.: «Мир», 1983. – 392 с.
23. Вербицкий М.С. Начальный курс топологии в листочках: задачи и теоремы. – М.: МЦНМО, 2017. – 352 с.
24. Горчинский С.О. Вычеты и символы в K-теории и группы Чжоу // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – М.: Математический институт им. В.А. Стеклова, 2018. – 246 с.
25. Сосинский А.Б. Уход Александра Гротендика // Математическое просвещение. Серия 3. – 2015. – Вып.19. – С.72-80.

26. Ивин А.А. Логика: учебное пособие. – Москва-Берлин: «Директ Медиа», 2015. – 318 с.
27. Куликов В.С., Шабат Г.Б. Игорь Ростиславович Шафаревич – великий математик и учитель // Математическое просвещение. Серия 3. – 2018. - Вып.22. - С.37-63.
28. Гельвеций К.А. Об уме // Гельвеций К.А. Сочинения в 2-х томах. Том 1. – М.: «Мысль», 1973. – С.143-632.
29. Гельвеций К.А. О человеке // Гельвеций К.А. Сочинения в 2-х томах. Том 2. – М.: «Мысль», 1974. – С.6-567.