*УДК 168*

***Новиков Н.Б.,***
***Институт психологии РАН***
***Россия, г. Москва***

# РОЛЬ АНАЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ. ЧАСТЬ 1

***Аннотация:*** *Традиционно предполагается, что основными логическими процедурами, позволяющими разработать доказательство того или иного математического утверждения, являются дедукция и метод рассуждений, называемый математической индукцией. Последний метод имеет строгость, равнозначную «силлогизмам Аристотеля», поэтому общепринято считать, что математическая индукция – это своеобразный эквивалент упомянутых силлогизмов. При этом роль аналогии в поиске математического доказательства до сих пор остается мало изученной. Герман Вейль полагал, что аналогия совершенно бесполезна в работе, связанной с обоснованием теорем. Это мнение он выразил в очерке «Феликс Клейн и его место в математической современности» [1]. В настоящей статье мы намерены показать, что Г. Вейль ошибался: аналогия (компонент индуктивной логики) играет важную роль не только в процессе формулировки математических идей, но и в процессе поиска их строгого доказательства.*

***Ключевые слова:*** *творческое мышление, математическое доказательство, аналогия, перенос идей.*

***Abstract:*** *Traditionally, it is assumed that the main logical procedures that allow one to develop a proof of a particular mathematical statement are deduction and a method of reasoning called mathematical induction. This method of reasoning has a rigor equivalent to the "syllogisms of Aristotle", so it is generally accepted that mathematical induction is a kind of equivalent of the aforementioned syllogisms.*

*However, the role of analogy in the search for mathematical proof remains little studied. Hermann Weyl believed that analogy was completely useless in work related to the justification of theorems. He expressed this opinion in the essay "Felix Klein and his place in modern mathematics" [1]. In this article, we intend to show that G. Weyl was wrong: analogy (a component of inductive logic) plays an important role not only in the process of formulating mathematical ideas, but also in the process of searching for their rigorous proof.*

**Key words:** *creative thinking, mathematical proof, analogy, transfer of ideas.*

Безусловно, нахождение математического доказательства той или иной теоремы (особенно, если это доказательство в течение длительного времени ускользало от крупных математиков, несмотря на все их усилия) является настоящим научным открытием. Многие математики признавались, что найти доказательство математического утверждения сложнее, чем впервые обнаружить ранее неизвестную идею. Например, Карл Гаусс сообщал, что он открыл закон взаимности квадратичных вычетов (относящийся к области высшей арифметики) посредством индукции, но поиск доказательства этого закона оказался нелегким. Со слов К. Гаусса, доказательства математических фактов «извлекаются на свет лишь после многих тщетных попыток» [2, с.636]. Яркий пример сложного доказательства, которое не могли найти сильнейшие математики на протяжении 100 лет, - обоснование гипотезы Пуанкаре о том, что всякое односвязное компактное трехмерное многообразие без края гомеоморфно трехмерной сфере. Французский математик Анри Пуанкаре сформулировал данную гипотезу в 1904 г., но доказать ее удалось лишь в 2002-2003 гг. Как известно, это сделал российский математик Григорий Перельман, отказавшийся от всех наград за это достижение: от медали Филдса, присужденной ему в 2006 г., а также премии Математического института Клэя (США), присужденной Г. Перельману в 2010 г. Отказ отечественного математика от этих наград напоминает слова древнегреческого философа

Демокрита, автора атомистической гипотезы: «Найти одно математическое доказательство для меня значит больше, чем овладеть всем персидским царством».

Но как рождаются на свет математические доказательства? Как ученый находит путь, ведущий к обоснованию важной математической гипотезы? Специалисты выделяют, по меньшей мере, три метода построения математических доказательств: 1) метод дедуктивных рассуждений; 2) метод математической индукции, 3) метод полного (сплошного) перебора. Последний метод иногда вызывает возражения (особенно, когда полный перебор выполняется компьютером), но ученик А.Н. Колмогорова - Владимир Андреевич Успенский (1930-2018) отмечал полезность и эффективность такой стратегии обоснования математических идей. В книге «Простейшие примеры математических доказательств» [3] он разъясняет задачу, которую ставил перед собой в процессе работы над книгой: «Мы преследовали и еще одну, практическую цель: приучить читателя не бояться доказательств методом перебора. Ведь хотя осуществление доказательства методом перебора может потребовать времени намного большего, чем проведение какого-нибудь хитроумного короткого доказательства, зато поиск такого хитроумного короткого доказательства может затянуться надолго…» [3, с.11-12].

Однако легко заметить, что среди перечисленных методов обоснования гипотез нет метода аналогии (переноса идей из одной области в другую). По-видимому, среди ряда специалистов укоренилось мнение, что аналогия, являющаяся процедурой нестрогой (вероятностной) логики, не может применяться при разработке математических доказательств, которые должны быть строгими (надежными, не допускающими сомнений). Эти специалисты согласны с тем, что аналогия играет существенную роль в генерации (выдвижении) новых идей, но склонны отрицать возможность того, чтобы та же аналогия оказывала какую-либо помощь в доказательстве этих идей. Например, немецкий математик и физик-теоретик Герман Вейль (1885-1955), отмечая тот факт, что Давид Гильберт широко использовал в своем математическом творчестве аналогию между теорией чисел и теорией функций, в то же время констатирует, что аналогия не может быть продуктивной в сфере поиска и разработки доказательств. В очерке «Феликс Клейн и его место в математической современности» [1] Г. Вейль говорит: «В самом деле, когда Гильберт прокладывал новые пути в теории числовых полей, он руководствовался аналогией, имеющейся между ней и положением вещей в области алгебраических функций, которое с помощью своих методов раскрыл Риман. Конечно, для доказательства аналогия была совершенно бесполезна» [1, с.268].

Ниже мы приведем множество историко-научных фактов (эпизодов из творческой жизни крупных математиков), не согласующихся с точкой зрения Германа Вейля. Эти факты показывают, что процедура аналогии, основанная на обнаружении сходства между разными идеями и теориями, часто заставляет математиков переносить схемы доказательств из одной области в другую, заимствовать в одном математическом разделе (дисциплине) средства обоснования гипотезы, сформулированной в другом разделе. Таким образом, прежний взгляд на аналогию как на инструмент выдвижения (формулировки) новых математических гипотез нужно дополнить новым взглядом: аналогия – это также инструмент поиска математических аргументов, необходимых для доказательства упомянутых гипотез. К сожалению, объем статьи исключает чрезвычайно подробное описание тех фактов, о которых мы хотим рассказать, поэтому нам придется быть краткими.

## 1. Доказательство основной теоремы алгебры, предложенное Карлом Гауссом

Карл Гаусс разработал одно из трех предложенных им доказательств основной теоремы алгебры по аналогии с доказательством, разработанным

Даламбером. Первые варианты доказательства указанной теоремы представлены в диссертации К. Гаусса под названием «Новое доказательство теоремы о том, что каждая целая рациональная алгебраическая функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой или второй степени» (1799). Упомянутую теорему можно было бы назвать теоремой Жирара – Декарта. Французский математик Альбер Жирар (1595-1632) в работе «Новое открытие в алгебре» (1629) дал следующую формулировку теоремы: уравнение степени n должно иметь ровно n корней, действительных или «воображаемых» (мнимых). Рене Декарт в сочинении «Геометрия» (1637) заявил: всякое уравнение имеет столько же различных корней, или значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений.

А.И. Маркушевич в очерке «Работы Гаусса по математическому анализу» [4] пишет: «В начале диссертации Гаусс подвергает критическому разбору известные ему доказательства Даламбера, Эйлера, Фонсене и Лагранжа. Наиболее интересным, с точки зрения математического анализа, представляется связанное с разбором доказательства Даламбера подробное разъяснение Гауссом того обстоятельства, что ограниченная сверху функция не всегда достигает своей верхней грани. Собственно, само доказательство Гаусса представляет **проведение идеи Даламбера**. Вопрос о существовании корня сводится к существованию точки пересечения двух кривых U = 0 и T = 0, где U и T являются, соответственно, действительной и мнимой частями многочлена X, рассматриваемыми как функции полярных координат r и φ точки плоскости. Впрочем, Гаусс нигде не использует при доказательстве в явном виде комплексные числа» [4, с.178-179].

## 2. Доказательство закона больших чисел в версии Пуассона, найденное П.Л. Чебышевым

П.Л. Чебышев нашел второе и более эффективное доказательство закона больших чисел в версии Пуассона (теоремы Пуассона, обобщающей теорему Бернулли) благодаря тому, что по аналогии перенес в область доказательства этой теоремы схему рассуждений французского математика Ирене-Жуля Бьенеме (1796-1878). Эта схема рассуждений была изложена в его сочинении 1853 г. Отметим, что первое доказательство теоремы Пуассона было опубликовано П.Л. Чебышевым в 1846 г.

А.А. Марков в юбилейной речи «Двухсотлетие закона больших чисел» [5] указывает: «Через двадцать лет после первого Чебышев дал второе доказательство теоремы Пуассона. Оно помещено на русском языке в «Математическом сборнике» за 1866 год под заглавием «О средних величинах» и на французском языке в журнале Лиувилля за 1867 год. Это второе доказательство, основанное на рассмотрении математического ожидания одного квадрата, отличается поразительной простотой и дает теорему, более общую, чем теорема Пуассона, так как здесь речь идет уже не о числе появлений события, а о сумме различных величин. Надо, однако, заметить, что **основные его пункты** были указаны еще в 1853 году французским математиком Бьенэмэ в мемуаре «Considerations a l’appui de la decouverte de Laplace sur la loi de probabilite dans la methode des moundres carres», который был написан по поводу спора Бьенэмэ с Коши о преимуществах метода наименьших квадратов. Мемуар этот в свое время был помещен в «Comptes Rendus» (том 37) и затем перепечатан в журнале Лиувилля за 1867 год как раз перед мемуаром Чебышева, без указания, однако, на существующую между ними связь. Впоследствии Чебышев в краткой заметке, которая была прочитана им в августе 1873 года на съезде в Лионе и напечатана также в журнале Лиувилля за 1874 год, отмечая эту связь, **сам назвал свое второе доказательство** одним из результатов нового метода, который дал Бьенэмэ в упомянутом мемуаре. Этот метод – метод моментов…» [5, с.14-15].

Аналогичная информация содержится в книге «Математика XIX века. Математическая логика, алгебра, теория чисел, теория вероятностей» [6], написанной под редакцией А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. В данной книге, в частности, приводится высказывание П.Л. Чебышева об использовании им схемы рассуждений И.Ж. Бьенеме: «Простое и строгое доказательство закона Бернулли, находящееся в моей заметке «О средних величинах», представляет один из результатов, легко получаемых из метода Бьенеме, при помощи которого он сам пришел к доказательству одного предложения о вероятностях, из которого закон Бернулли вытекает непосредственно» [73]» [6, с.224].

Здесь [73] – Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений. Том 3. – Москва-Ленинград: изд-во АН СССР, 1948.

## 3. Доказательство теоремы об арифметической прогрессии, найденное П. Лежен-Дирихле

В свое время немецкий математик Петер Густав Лежен-Дирихле (1805-1859) дал набросок доказательства важной арифметической теоремы, а именно теоремы о том, что всякая арифметическая прогрессия, первый член и разность которой взаимно просты, содержит бесконечно много простых чисел. Как он нашел это доказательство (пусть даже в варианте наброска)? Руководствуясь принципом аналогии. Схема рассуждений, которая легла в основу этого доказательства, была по аналогии подсказана ему схемой рассуждений Леонарда Эйлера, содержащейся в его сочинении «Введение в анализ бесконечных» (1748).

В книге «Математика XIX века» [6] сообщается: «Работа Дирихле «Доказательство теоремы об арифметической прогрессии» (1837) содержала только набросок первого точного доказательства теоремы о том, что всякая арифметическая прогрессия, первый член и разность которой взаимно просты, содержит бесконечно много простых чисел – первой строго доказанной теоремы о распределении простых чисел, после того как древние установили, что множество всех простых чисел в натуральном ряду бесконечно. Доказательство проведено для случая, когда разность прогрессии – простое нечетное число и, как указывает Дирихле, **аналогично рассуждению Эйлера** в § 229 главы 15 том I «Введения в анализ бесконечных» (1748)» [6, с.154].

Обратим внимание на то, как точен и скрупулезен П. Лежен-Дирихле, раскрывая исходные посылки своей аналогии: он не только откровенно сообщает, что взял за основу своего доказательства рассуждения Эйлера, но и называет номер параграфа, главы и тома, где представлены эти рассуждения.

## 4. Доказательство трансцендентности числа π, найденное Фердинандом Линдеманом

Немецкий математик Фердинанд Линдеман (1852-1939) доказал трансцендентность числа π по аналогии с тем, как его французский коллега Шарль Эрмит доказал трансцендентность числа е (число е - основание натурального логарифма). Другими словами, Ф. Линдеман перенес в область доказательства числа π – математической постоянной, выражающей отношение длины окружности к ее диаметру, схему рассуждений, посредством которой Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа, являющегося основанием натурального логарифма.

Е.П. Ожигова в книге «Шарль Эрмит» [7] пишет об успехе Линдемана: «Принесшее ему известность доказательство трансцендентности π, которое позволило решить, наконец, задачу о квадратуре круга, Линдеман получил как простое следствие теоремы, **обобщавшей результат Эрмита**, о чем сразу же сообщил ему в письме» [7, с.90]. Автор продолжает: «Спустя тридцать лет, выступая на своем юбилее с ответным словом на многочисленные приветствия своих учеников и почитателей, Линдеман сказал, что никогда бы не пришел к решению старинной проблемы квадратуры круга без помощи своего великого учителя Эрмита [II, 302, с.29]. Известие о доказательстве Линдемана Эрмит воспринял с огромным удовлетворением» [7, с.91].

Ниже Е.П. Ожигова приводит высказывание А.О. Гельфонда, обсуждающего аналогию Ф. Линдемана: «С помощью специального интегрального тождества, которому удовлетворяет функция $e^x$, Эрмит доказал в 1873 г. трансцендентность числа e – основания натуральных логарифмов [II, 25, с.298]. Несколько **обобщив тождество Эрмита**, Линдеман в 1882 г. доказал трансцендентность чисел вида $e^\alpha$, где α – алгебраическое число, откуда сразу же следует трансцендентность числа π и тем самым отрицательное решение проблемы квадратуры круга» [7, с.92].

Этот же вопрос обсуждается в книге «Математика XIX века» [6]: «Доказательство трансцендентности числа π Линдеман получил как простое следствие теоремы, **обобщавшей результат Эрмита**. Линдеман сообщил свое доказательство в письме к Эрмиту, который немедленно доложил о нем Академии и опубликовал его содержание под заглавием «Об отношении окружности к диаметру и о логарифмах соизмеримых чисел или алгебраических иррациональностей» (1882)» [6, с.182].

Сошлемся на еще одну работу. В.В. Козлов, О.Б. Лупанов, Ю.В. Нестеренко и др. в статье «Андрей Борисович Шидловский (к 90-летию со дня рождения)» [8] пишут: «…В 1873 г. Ш. Эрмит доказал, что число e не является корнем никакого многочлена с рациональными коэффициентами, т.е. трансцендентно. В 1882 г. Ф. Линдеман **обобщил это утверждение**, доказав, что при любом алгебраическом $\alpha \neq 0$ значение экспоненциальной функции $e^\alpha$ трансцендентно. Отсюда при $\alpha = \pi_i$ следует трансцендентность π» [8, с.184].

Примечательно, что жена Ф. Линдемана побуждала его к тому, чтобы он также пытался доказать великую теорему П. Ферма, но при решении данной задачи Ф. Линдеман не получил сколько-нибудь значимых результатов [9].

## 5. Доказательство ряда теорем из теории множеств, предложенное Георгом Кантором

Георг Кантор доказал ряд важных теорем в своей теории множеств (например, теорему о том, что мощность континуума превосходит мощность любого счетного множества) в результате того, что по аналогии перенес в область доказательства упомянутых теорем диагональный метод, примененный немецким математиком Полем Дюбуа-Реймоном (1831-1889) при обосновании математических утверждений из теории роста функций.

Ф.А. Медведев в книге «Развитие теории множеств в XIX веке» [10] пишет: «…В исследованиях Дюбуа-Реймона по теории роста функций в явной форме употреблен **диагональный метод**, обычно рассматриваемый как метод доказательства, имеющий принципиальную важность в теории множеств, поскольку при его помощи доказывается существование множеств возрастающих мощностей. Этот метод использовался Дюбуа-Реймоном в работе «Новая теория сходимости и расходимости рядов с положительными членами» [18] в 1873 г., т.е. еще до появления его в трудах Кантора» [10, с.88].

«Дюбуа-Реймон, - продолжает автор, - не только разработал теорию роста функций и пользовался **диагональным методом** в вопросах сходимости рядов. В ряде исследований он вплотную подошел к теории точечных множеств, и некоторые из его результатов тесно переплетаются с первыми результатами Кантора. Наиболее характерна в этом отношении статья «Попытка классификации произвольных функций по их изменению в сколь угодно малом интервале» [20]» [10, с.90].

Далее Ф.А. Медведев детализирует результаты Г. Кантора, показывая, как в 1873 г. с помощью диагонального метода он доказал невозможность взаимно однозначного соответствия между множеством всех действительных чисел и множеством натуральных чисел: «Тем самым доказано, что множество действительных чисел интервала не может быть перенумеровано при помощи натуральных чисел. В этом доказательстве мы видим применение того же самого **диагонального метода**, которым за год до того пользовался Дюбуа-Реймон при построении функции, возрастающей быстрее любой из заданной последовательности все более быстро возрастающих функций: для предложенной счетной последовательности объектов (чисел у Кантора, функций у Дюбуа-Реймона) строится объект (число или функция), не содержащийся в заданной последовательности» [10, с.95-96].

## 6. Доказательство одной из теорем из теории мероморфных функций, найденное Анри Пуанкаре

Великий французский математик А. Пуанкаре доказал теорему о том, что мероморфная функция нескольких переменных всегда является отношением двух целых функций, по аналогии с тем, как Карл Вейерштрасс доказал теорему о существовании целой функции рода 2, которая допускает все нули некоторой эллиптической функции. Напомним, что мероморфными называются функции, не имеющие иных особых точек, кроме полюсов, то есть точек, в которых они обращаются в бесконечность.

А. Пуанкаре в статье «Аналитическое резюме» [11] сообщает: «Напомню о том приеме, с помощью которого я доказал, что мероморфная функция нескольких переменных всегда является отношением двух целых функций (Vide Supra раздел VII). Какова природа этих целых функций? Усовершенствования, внесенные [101] в мое первоначальное доказательство, позволили решить этот вопрос и прямо показать, что если мероморфная функция периодическая, то эти две целые функции являются «периодическими функциями». Я ограничусь указанием того, что доказательство **представляет аналогию** с доказательством, которым Вейерштрасс установил, что существует целая функция рода 2, которая допускает все нули некоторой эллиптической функции» [11, с.619].

## 7. Доказательство общего закона взаимности для абелевых расширений алгебраических числовых полей (результат Эмиля Артина)

Австрийский математик Эмиль Артин (1898-1962) нашел доказательство общего закона взаимности (о котором мечтал Д. Гильберт) благодаря тому, что по аналогии перенес в область доказательства этого закона результаты русского математика Н.Г. Чеботарева, относящиеся к теории полей классов.

Гельмут Хассе в статье «История теории полей классов» [12], отмечая, что в 1927 г. Э. Артин открыл общую теорему изоморфизма, повествует далее об открытии им общего закона взаимности: «Артин [1] (1924) получил этот закон взаимности четырьмя годами раньше и доказал его в несложных частных случаях. Однако лишь когда Артин ознакомился с **методом Чеботарева** пересечения классов из группы A/H с относительными классами, соответствующими круговым расширениям, он достиг успеха в своих поисках общего доказательства. Чеботарев [47] (1926) разработал свой метод в целях усиления одной теоремы Фробениуса [32] (1896)…» [12, с.482-483].

Об этом же сообщает сам Н.Г. Чеботарев в статье «Математическая автобиография» [13]: «Летом 1927 года, изучая теорию полей классов, я пришел к убеждению, что можно доказать закон Артина (общий закон взаимности – Н.Н.Б.), воспользовавшись моим приемом присоединения полей деления круга. Когда у меня уже начали намечаться контуры доказательства, пока еще довольно смутные, мы переехали с дачи в город, и там я сейчас же увидел на библиотечной витрине томик Hamb. Abh. со статьей Артина… Моя досада была сразу смягчена, когда я увидел, что Артин упоминает в начале статьи, что основная мысль доказательства, присоединение полей деления круга, была им **заимствована из моей работы**. Я был очень тронут щепетильностью Артина в вопросах цитирования…» [13, с.59]. Автор добавляет: «Закон взаимности Артина совершил переворот в теории полей классов – теории, внутренний смысл которой до сих пор полностью не разгадан, и Гассе (Гельмут Хассе – Н.Н.Б.) под влиянием открытия этого закона взаимности написал новый томик обзора теории полей классов…» [13, с.59].

В другом месте своей автобиографической статьи Н.Г. Чеботарев указывает, что он разработал метод присоединения полей деления круга (которым воспользовался Эмиль Артин), чтобы определить плотность множества простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок. Эту задачу безуспешно пытался решить немецкий математик Фердинанд Георг Фробениус (1849-1917). Автор замечает: «Первым по времени и, пожалуй, произведшим наибольшие изменения в структуре отделов математики (в данном случае, теории алгебраических чисел) был мой результат по нахождению плотности множества простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок (1922). Этот результат **не удалось получить Фробениусу**, который в 1896 году развил всю теорию простых чисел, принадлежащих к классам подстановок, но не мог получить окончательного результата, хотя энергично добивался его и в попытках создал весьма важную теорию групповых характеров. Я добился этого более простым путем: присоединил к полю большое количество корней из единицы. Мой метод дал **возможность Артину доказать** свой общий закон взаимности, который коренным образом перестроил теорию полей классов» [13, с.63].

## 8. Доказательство обобщенной предельной теоремы П. Лапласа, разработанное С.Н. Бернштейном

Выдающийся отечественный математик Сергей Натанович Бернштейн (1880-1968) доказал в 1927 г. обобщенную предельную теорему Лапласа благодаря тому, что по аналогии перенес в область доказательства этой теоремы схему рассуждений английского математика Карла Пирсона (1857-1936), которую сам Пирсон использовал в других целях. В частности, К. Пирсон использовал упомянутую схему рассуждений, чтобы установить новый тип кривых распределения вероятностей, обобщающих кривую Лапласа. Перед нами очередной пример творческой (креативной) роли аналогии в поиске математического доказательства. Напомним, что локальная предельная теорема Лапласа, установленная им в 1812 г., гласит: если при каждом из n независимых испытаний вероятность появления некоторого случайного события E равна p ∈ (0, 1), и m – число испытаний, в которых E фактически наступает, то вероятность справедливости неравенства близка (при больших n) к значению интеграла Лапласа.

С.Н. Бернштейн в монографии «Теория вероятностей» [14] сначала формулирует обобщенную предельную теорему Лапласа (часто называемую «теоремой Муавра - Лапласа»), а затем объясняет, как он доказал ее: «Идея данного нами доказательства обобщенной теоремы Лапласа **заимствована у Пирсона**, который, однако, использовал ее для другой цели, а именно для установления новых типов кривых распределения вероятностей, обобщающих кривую Лапласа (допустивши при этом некоторые математические неправильности)» [14, с.246].

## 9. Доказательство теоремы Харди – Рамануджана, найденное П. Тураном

Венгерский математик Пал Туран (1910-1976) доказал теорему Харди - Рамануджана в результате того, что по аналогии перенес в теорию чисел метод доказательства слабого закона больших чисел, то есть метод, заимствованный из теории вероятностей. Как известно, теорема Харди – Рамануджана утверждает, что почти каждое целое m имеет приближенно Log Log m простых делителей. Годфри Харди (1877-1947) и Сриниваса Рамануджан (1887-1920) доказали эту теорему в 1917 г., но Пал Туран в 1934 г. нашел новое доказательство, использующее методы теории вероятностей.

Марк Кац в книге «Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел» [15] пишет о том, как П. Туран доказал теорему Харди – Рамануджана: «Доказательство, приведенное выше, предложено П. Тураном, и оно гораздо проще первоначального доказательства Харди - Рамануджана. Как читатель может заметить, прием Турана является **прямым аналогом доказательства** слабого закона больших чисел, которое мы дали в п.1 гл.2. Это еще один пример, когда идеи, **заимствованные из одной области**, приводят к плодотворным применениям в другой» [15, с.109-110].

О доказательстве П. Турана, основанном на аналогии, сообщает также И.П. Кубилюс в статье «Вероятностные методы в теории чисел» [16]: «С другой стороны, теорема Харди и Рамануджана представляет собой аналог теоретико-вероятностного закона больших чисел. Поэтому, естественно, возникает мысль об использовании для ее доказательства **соображений, аналогичных** употребляемым в доказательстве закона больших чисел. Такое доказательство было найдено в 1934 г. П. Тураном [13]» [16, с.34].

«Нетрудно усмотреть в доказательстве П. Турана, - поясняет автор, - аналог метода Чебышева для доказательства закона больших чисел. П. Туран [14] **обобщил также теорему** Харди и Рамануджана на более широкий класс сильно аддитивных арифметических функций» [16, с.35].

## 10. Доказательство гипотезы А. Пуанкаре о конечности ранга эллиптической кривой над полем рациональных чисел (результат Луиса Морделла)

В свое время английский математик Луис Морделл (1888-1972) доказал теорему о том, что ранг эллиптической кривой над полем рациональных чисел всегда конечен. Ранг кривой – это число независимых рациональных точек на кривой. Каким образом Л. Морделл доказал указанную теорему, которая до его исследований представляла собой гипотезу А. Пуанкаре? Английский математик по аналогии перенес в область своего доказательства метод бесконечного спуска, ранее использованный математиками при доказательстве других теорем. Например, этот метод как средство доказательства использовали Пьер Ферма и Леонард Эйлер. Напомним, что Л. Эйлер воспользовался методом бесконечного спуска (заимствованным у П. Ферма) с целью доказательства великой теоремы Ферма для случая $n = 3$.

И.Г. Башмакова в книге «Диофант и диофантовы уравнения» [17] пишет о теореме, доказанной Л. Морделлом: «Это утверждение получило название гипотезы Пуанкаре. Оно было доказано только в 1922 году английским математиком Л. Дж. Морделлом. Это был самый выдающийся результат со времен Пуанкаре. Теорему о том, что ранг кривой рода 1 над полем рациональных чисел всегда конечен, он получил при помощи **метода спуска Ферма**» [17, с.63].

Описание метода бесконечного спуска можно найти в книге Г. Эдвардса «Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел» [18], где автор повествует: «Метод бесконечного спуска изобрел Ферма, и этим изобретением он чрезвычайно гордился. В длинном письме, написанном незадолго до смерти, он подвел итог своим открытиям в теории чисел и с полной определенностью заявил, что **во всех своих доказательствах** пользовался этим методом. Коротко говоря, этот метод состоит в следующем: некоторые свойства или отношения невозможны для целых чисел, если исходя из предположения о том, что они выполняются для каких-либо чисел, удается доказать, что они выполняются для некоторых меньших чисел. Действительно, в таком случае то же самое рассуждение позволяет заключить, что они выполняются для еще меньших чисел и т.д. – ad infinitum, - что невозможно, поскольку последовательность положительных целых чисел не может бесконечно убывать» [18, с.21].

Далее автор говорит об Эйлере: «В своем доказательстве последней теоремы Ферма при $n = 3$ Эйлер применяет принадлежащий Ферма **метод бесконечного спуска**. Он показывает, что если можно найти положительные целые числа x, y, z, удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^3$, то существуют меньшие положительные числа с тем же свойством; таким образом, в случае разрешимости этого уравнения можно было бы найти убывающую бесконечную последовательность таких троек целых положительных чисел. Ясно, что такой последовательности не существует. Следовательно, нельзя найти таких чисел x, y, z» [18, с.57].

Во 2-ой части статьи мы проанализируем генезис таких результатов, как доказательство теоремы о минимаксе (Джон фон Нейман), доказательство теоремы о неполноте (Курт Гедель), обоснование теоремы о неразрешимости проблемы остановки (Алан Тьюринг), обоснование ряда теорем из теории Колмогорова – Арнольда – Мозера, доказательство теоремы об индексе эллиптического оператора (Майкл Атья), обоснование теорем, которые привели к решению ослабленной проблемы Бернсайда (Ефим Зельманов) и т.д.

**Литература:**

1. Вейль Г. Феликс Клейн и его место в математической современности // Вейль Г. Математическое мышление. – М.: «Наука», 1989. - С.256-270.

2. Гаусс К.Ф. Новые доказательства и обобщения фундаментальной теоремы в учении о квадратичных вычетах // Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. – М.: изд-во АН СССР, 1959. – С.636-654.

3. Успенский В.А. Простейшие примеры математических доказательств. - М.: МЦНМО, 2009. – 56 с.

4. Маркушевич А.И. Работы Гаусса по математическому анализу // сборник «Карл Фридрих Гаусс». – М.: изд-во АН СССР, 1956. – С.145-216.

5. Марков А.А. Двухсотлетие закона больших чисел // Бернулли Я. О законе больших чисел. – М.: «Наука», 1986. - С.9-16.

6. Математика XIX века. Математическая логика, алгебра, теория чисел, теория вероятностей. Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. – М.: «Наука», 1978. – 256 с.

7. Ожигова Е.П. Шарль Эрмит. – Ленинград: «Наука», 1982. – 288 с.

8. Козлов В.В., Лупанов О.Б., Нестеренко Ю.В. и др. Андрей Борисович Шидловский (к 90-летию со дня рождения) // Успехи математических наук. – 2006. - Том 61. - № 2. – С.183-190.

9. Успенский В.А. Апология математики (сборник статей). – М.: изд-во «Альпина нон-фикшн», 2017. – 710 с.

10. Медведев Ф.А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: «Наука», 1965. – 232 с.

11. Пуанкаре А. Аналитическое резюме // Пуанкаре А. Избранные труды. Том 3. – М.: «Наука», 1974. – С.579-623.

12. Хассе Г. История теории полей классов // Гильберт Д. Избранные труды. Том 1. – М.: «Факториал», 1998. – С.476-489.

13. Чеботарев Н.Г. Математическая автобиография // Успехи математических наук. – 1948. - Том 3. - № 4. – С.3-66.

14. Бернштейн С.Н. Теория вероятностей. – Москва-Ленинград: Государственное издательство, 1927. – 365 с.

15. Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. – М.: изд-во иностранной литературы, 1963. – 156 с.

16. Кубилюс И.П. Вероятностные методы в теории чисел // Успехи математических наук. – 1956. - Том 11. - № 2 (68). – С.31-66.

17. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: «Наука», 1972. – 68 с.

18. Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. – М.: «Мир», 1980. – 484 с.