УДК 168

Новиков Н.Б.,

Институт психологии РАН

Россия, г. Москва

РОЛЬ АНАЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ. ЧАСТЬ 2

Аннотация: *В данной статье мы продолжаем анализировать роль аналогии (переноса) в процессе поиска математического доказательства. Мы рассмотрим, как были найдены доказательства таких важных математических результатов, как теорема о неполноте (Курт Гедель), теорема о неразрешимости проблемы остановки (Алан Тьюринг), великая теорема Ферма (Эндрю Уайлс), теорема о свойствах односвязного компактного трехмерного многообразия без края (Григорий Перельман) и т.д. Учитывая, что эти и многие другие теоремы были доказаны за счет того, что математики смело переносили вполне определенные идеи и методы из одного раздела математической науки в другой, мы подчеркиваем, что аналогия – незаменимый инструмент поиска математического доказательства. Это говорит об ошибочности мнения Германа Вейля о бесполезности аналогии в работе, связанной с обоснованием теорем.*

Ключевые слова: *творческое мышление, математическое доказательство, аналогия, перенос идей.*

Abstract: *In this article, we continue to analyze the role of analogy (transfer) in the process of searching for a mathematical proof. We will consider how proofs were found for such important mathematical results as the incompleteness theorem (Kurt Gödel), the theorem on the undecidability of the halting problem (Alan Turing), Fermat's Last Theorem (Andrew Wiles), the theorem on the properties of a simply connected compact three-dimensional manifold (Gregory Perelman), etc.*

Given that these and many other theorems were proven by mathematicians boldly transferring well-defined ideas and methods from one area of mathematical science to another, we emphasize that analogy is an indispensable tool in the search for mathematical proof. This shows that Hermann Weyl's opinion about the uselessness of analogy in work related to the justification of theorems is erroneous.

Key words: *creative thinking, mathematical proof, analogy, transfer of ideas.*

1. Доказательство теоремы о минимаксе из теории игр, предложенное Джоном фон Нейманом

Выдающийся американский математик венгерского происхождения Джон фон Нейман (1903-1957) доказал в 1926 г. теорему о минимаксе, являющуюся важной теоремой математической теории игр, благодаря тому, что по аналогии перенес в область доказательства указанного математического результата теорему Л. Брауэра о неподвижной точке.

Ю.А. Данилов в книге «Джон фон Нейман» [1] пишет: «Необычайно широкий математический кругозор фон Неймана, его поразительная осведомленность о состоянии дел в самых различных областях математики и виртуозное владение всем арсеналом средств современной математики позволяли ему обнаруживать **«неожиданную помощь»**, которую один из разделов математики может оказать другому, а аксиоматический метод и склонность к абстрактному мышлению, необычная даже для математика его ранга, - доискиваться до первопричин каждого такого открытия. Так, топологическая теорема Брауэра о неподвижной точке позволила фон Нейману доказать теорему о минимаксе…» [1, с.39].

Следует отметить, что теорема о неподвижной точке содержалась уже в исследованиях А. Пуанкаре, который хорошо понимал значение этой теоремы для математического анализа. П.С. Александров в статье «Пуанкаре и топология» [2] пишет: «В частности, что касается специально теорем о существовании неподвижных точек при тех или иных непрерывных отображениях, то Пуанкаре уже понимал значение этих теорем как средства доказательства теорем существования в анализе. Это видно хотя бы по тем огромным усилиям, которые он затратил на доказательство своей «последней геометрической теоремы» - о существовании неподвижной точки для определенного класса непрерывных отображений плоского кругового кольца на себя» [2, с.150]. «…Сейчас для нас важно констатировать, - подчеркивает автор, - как глубоко мог Пуанкаре предвидеть значение топологических теорем типа «теорем о неподвижных точках» для анализа и для небесной механики, и отметить его как **основоположника** «метода неподвижных точек» [2, с.150].

2. Доказательство теоремы о неполноте, разработанное Куртом Геделем

Австрийский математик Курт Гедель (1906-1978) доказал в 1930 г. свою знаменитую теорему о неполноте за счет того, что по аналогии перенес в область доказательства указанной теоремы «диагональный метод» Кантора – способ рассуждений, посредством которого Георг Кантор доказал ряд важных утверждений в теории множеств. Как отмечено нами выше, сам Кантор заимствовал этот метод при изучении работ П. Дюбуа-Реймона, где диагональный метод применялся для обоснования некоторых утверждений из теории роста функций.

М. Кац и С. Улам в книге «Математика и логика. Ретроспектива и перспектива» [3] пишут о Г. Канторе: «Он заметил, что множество всех целых чисел, множество всех рациональных чисел и множество всех алгебраических чисел имеют одинаковую мощность, т.е. между ними можно установить взаимно однозначные соответствия. Затем был установлен важнейший результат: мощность континуума действительных чисел больше мощности счетного множества. Он был доказан с помощью знаменитого диагонального метода Кантора – простого, но сыгравшего весьма важную роль во всей теории» [3, с.175]. Авторы продолжают: «При помощи процесса, аналогичного диагональному **методу Кантора** (упомянутому выше), Гедель в рамках рассматриваемой системы сформулировал предложение, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами самой этой системы» [3, с.183].

Об этом же сообщает Дэвид Дойч в книге «Структура реальности» [4]: «…Гедель доказал, что если какой-то набор правил вывода в некоторой (достаточно обширной) области математики является непротиворечивым (неважно, доказуемо это или нет), то в пределах этой области должны существовать корректные методы доказательства, корректность которых нельзя установить, опираясь на данные правила. Это называется теоремой Геделя о неполноте. Для доказательства своих теорем Гедель пользовался замечательным расширением **«диагонального доказательства»** Кантора, о котором я упоминал в главе 6» [4, с.238].

Сошлемся на еще одну работу. Я.В. Шрамко в статье «Теорема Кантора и «фигуры умолчания» в научной дискуссии» [5] констатирует: «Диагональный **метод Кантора** играет ключевую роль не только при доказательстве несчетности континуума (множества действительных чисел), но и в знаменитой теореме Геделя о неполноте, в теории общерекурсивных и частично рекурсивных функций, для установления неразрешимости исчисления предикатов и для решения многих других важных математических задач» [5].

3. Доказательство теоремы о неразрешимости проблемы остановки для универсальной машины Тьюринга (результат А. Тьюринга)

Доказывая теорему о неразрешимости проблемы остановки машины Тьюринга (универсальной машины, придуманной для решения ряда сложных логических и иных задач), английский математик Алан Тьюринг (1912-1954) использовал диагональный метод. Как он пришел к мысли (1936) о необходимости применения данного метода при доказательстве указанной теоремы? По аналогии с исследованиями Курта Геделя, который, опираясь на диагональный процесс Кантора, обосновал свою теорему о неполноте.

Ричард Карп в статье «Комбинаторика, сложность и случайность» [6] пишет: «Тьюринг и другие первооткрыватели теории вычислимости были первыми, кто доказал, что некоторые корректно определенные математические задачи неразрешимы, т.е. что в принципе не существует алгоритма, способного к решению всех частных случаев таких задач. Первым примером такой задачи была задача остановки, по существу – вопрос об отладке компьютерных программ. <…> Как может не быть алгоритма для такой корректно определенной задачи? Сложности возникают из-за возможности неограниченного поиска. Очевидное решение состоит в выполнении программы до остановки. Но в какой момент становится логичным прервать исполнение программы, решив, что она никогда не остановится сама? Похоже, что нет никакого способа установить предел объема необходимых поисков. **Используя так называемый диагональный метод**, Тьюринг построил доказательство того, что не существует алгоритма, который может успешно рассмотреть все частные случаи проблемы остановки» [6, с.506-507].

Об этом же сообщает Р. Пенроуз в книге «Новый ум короля» [7]: «Одним из замечательных достижений Кантора явилось доказательство того, что действительных чисел больше, чем натуральных. При этом Кантор применил так называемый **диагональный процесс**, который упоминался в главе 2 и который **Тьюринг использовал** в своем доказательстве неразрешимости проблемы остановки для машин Тьюринга. Доказательство Кантора, как и более позднее доказательство Тьюринга, - это доказательство от противного» [7, с.80]. Далее автор добавляет: «…Тьюринг разработал свое доказательство неразрешимости проблемы остановки после изучения работ Геделя. Оба доказательства имеют много общего и, естественно, основные положения из результатов Геделя могут быть непосредственно получены путем использования процедуры Тьюринга» [7, с.105].

Ф.А. Медведев в книге «Ранняя история аксиомы выбора» [8] говорит о появлении диагонального метода в работах Г. Кантора: «Вопрос о множествах, имеющих мощности, большие счетной, даже об иерархии таких множеств и их мощностей или кардинальных чисел имел для Кантора принципиальное значение. К нему он обращался не раз, в частности, для его решения он изобрел особый способ рассуждений, получивший наименование **диагонального метода** Кантора. Видимо, наилучшим образом этот метод был описан его автором в работе «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях» [12]» [8, с.87].

4. Доказательство многих теорем из теории Колмогорова – Арнольда – Мозера (результат Юргена Мозера)

Немецкий математик Юрген Мозер (1928-1999) нашел доказательство результатов теории КАМ (теории Колмогорова – Арнольда - Мозера) в результате того, что по аналогии перенес в область этого доказательства метод сглаживания функции, то есть метод сглаживающего оператора, который ранее использовал американский математик, лауреат Нобелевской премии по экономике, Джон Нэш (1928-2015) при доказательстве теоремы о регулярном вложении. Теорема о регулярном вложении (теорема Нэша) – основная теорема римановой геометрии, которая утверждает, что любое риманово многообразие допускает гладкое вложение в евклидово пространство достаточно высокой размерности. Другими словами, Юрген Мозер, развивая теорию КАМ в статье «Об инвариантных кривых отображений кольца, сохраняющих площадь», перенес на задачи о периодических орбитах в небесной механике – задачи теории КАМ - схему сглаживающего оператора, использованную Дж. Нэшем в процессе доказательства одной из теорем римановой геометрии.

Дж. Н. Мезер в предисловии к книге Юргена Мозера «КАМ-теория и проблемы устойчивости» [9] пишет: «…Колмогоровский метод решения линеаризованного уравнения и проведения итераций не применим в дифференцируемом случае: после конечного числа шагов производные заканчиваются. Метод Мозера связан с выполнением сглаживания перед решением линеаризованной задачи. Это приводит к приближенной обратной функции линеаризованной задачи, которую Мозер использует вместо колмогоровской точной обратной функции. Мозер ранее применял этот метод в [13] для получения улучшенной версии теоремы Нэша (Nash) об изометрическом вложении с более простым доказательством, чем оригинальное доказательство Нэша. Теорема Нэша об изометрическом вложении находилась в центре внимания Мозера в течение многих лет, и он неоднократно обсуждал ее с Нэшем. Мозер всегда говорил, что метод, использованный в статьях [13] и «Об инвариантных кривых отображений кольца, сохраняющих площадь», во многом возник благодаря идеям Нэша. После статей Мозера этот метод стал называться методом Нэша – Мозера. При чтении статьи «Об инвариантных кривых отображений кольца, сохраняющих площадь» вы увидите, что выбор правильного оператора сглаживания является очень важным» [9, с.14].

Здесь [13] – Moser J.K. A new technique for the construction of solutions of non-linear differential equations // PNAS. – 1961. – Vol.47. – P.1824-1831.

5. Доказательство теоремы об индексе эллиптического оператора на замкнутом многообразии (результат Майкла Атьи)

Британский математик, лауреат премии Абеля за 2004 год, Майкл Атья (1929-2019) доказал теорему об индексе эллиптического оператора на замкнутом многообразии, руководствуясь аналогией. В частности, он использовал в качестве образца работу Ф. Хирцебруха, в которой содержалось доказательство обобщенного варианта теоремы Римана – Роха. Другими словами, Майкл Атья доказал теорему об индексе эллиптического оператора по аналогии с тем, как немецкий математик Фридрих Хирцебрух (1927-2012) доказал теорему Римана – Роха (обобщенную версию этой теоремы). М. Атья перенес в область доказательства теоремы об индексе схему рассуждений Ф. Хирцебруха, использованную последним при обосновании упомянутой теоремы Римана - Роха. Это исследование М. Атья выполнил в 1963 г. в сотрудничестве с американским математиком Изадором Мануэлом Зингером (1924-2021).

Б.Б. Венков в предисловии в книге Ф. Хирцебруха «Топологические методы в алгебраической геометрии» [10] пишет о том, как Майкл Атья доказал теорему об индексе: «Первое доказательство теоремы Атьи – Зингера об индексе **моделирует доказательство** Хирцебруха теоремы Римана - Роха» [10, с.6].

Этот же факт обсуждает Ф.Ф. Воронов в статье «Квантование на супермногообразиях и аналитическое доказательство теоремы Атьи - Зингера об индексе» [11]: «Первоначальное доказательство теоремы Атьи – Зингера [21] об индексе состояло в следующем. Общая формула сводилась, как сказано, к классическому оператору (конкретно – к оператору Хирцебруха d + d*, действующему из автодуальных форм в антиавтодуальные). Затем вычислялся индекс этого оператора («обобщенная сигнатура», индекс оператора Хирцебруха с коэффициентами в произвольном векторном расслоении). Здесь **доказательство уподоблялось** доказательству Хирцебруха теоремы о сигнатуре [28]…» [11, с.6].

Наконец, об этом же сообщают сами М.Ф. Атья и И.М. Зингер в статье «Индекс эллиптических операторов» [12]: «Читатель, хорошо знакомый с теоремой Римана - Роха, мог заметить, что наше первоначальное доказательство теоремы об индексе **моделировало доказательство** Хирцебруха теоремы Римана - Роха» [12, с.99].

Примечательно, что Майкл Атья сформулировал свою знаменитую теорему об индексе эллиптического оператора в попытках обобщить теорему Римана – Роха (точнее, теорему Римана – Роха - Хирцебруха). Собственно говоря, последняя теорема является частным случаем теоремы Атьи-Зингера об индексе. Это, кстати, объясняет, почему теорема об индексе доказывалась по аналогии с доказательством теоремы Римана – Роха – Хирцебруха.

М.И. Монастырский в книге «Современная математика в отблеске медалей Филдса» [13] пишет: «Теорема об индексе имеет длительную предысторию. Она вобрала в себя целый ряд классических результатов, связывающих топологические свойства многообразий с дифференциально-геометрическими. Например, классическая теорема Пуанкаре, выражающая сумму индексов векторного поля на поверхности через эйлерову характеристику, есть простейший частный случай теоремы об индексе. <…> Дальнейшие **обобщения этой теоремы** развивались в нескольких направлениях. Во-первых, расширялся класс многообразий, например, теорема об индексе **была перенесена** на многообразия с краем, открытые многообразия и т.д. Во-вторых, расширялся класс операторов. По существу, в первоначальном доказательстве использовался более обширный класс операторов – псевдодифференциальные операторы, теория которых развивалась в предшествующие годы. Крупный вклад в построение общей теории псевдодифференциальных операторов внес лауреат филдсовской медали 1962 г. Ларс Хермандер. Теорема об индексе нашла применение в теории комплексных алгебраических многообразий. Ее частным случаем является теория Римана – Роха – Хирцебруха – ключевой результат в алгебраической геометрии. Собственно, исследования Атьи и Зингера по проблеме индекса и начались **с попыток обобщить теорему** Римана – Роха – Хирцебруха» [13, с.52-53].

Аналогичная информация представлена в 4-ом томе книги «Математическая энциклопедия» [14], где отмечается: «Некоторые варианты теоремы Римана – Роха тесно связаны с проблемой индекса эллиптических операторов. Например, теорема Римана – Роха – Хирцебруха для компактных комплексных многообразий является частным случаем теоремы Атьи – Зингера об индексе» [14, с.1002].

6. Доказательство теорем, которые привели к решению ослабленной проблемы Бернсайда (результат Ефима Зельманова)

Отечественный математик, лауреат премии Филдса за 1994 год, Ефим Исаакович Зельманов (род. 1955 г.) решил ослабленную проблему Бернсайда, кратко обозначаемую как ОПБ, отчасти благодаря тому, что по аналогии перенес в область решения данной проблемы «метод сэндвичей», ранее примененный А.И. Кострикиным (1958) в процессе работы над той же проблемой. А.И. Кострикин решил ослабленную проблему Бернсайда (ОПБ) в частном случае, а именно для любого простого числа p, Е.И. Зельманов (1989) – для произвольного показателя.

Э.Б. Винберг, Е.С. Голод, Е.И. Зельманов и другие в статье «Алексей Иванович Кострикин» [15] пишут: «Развитие метода сэндвичей привело А.И. Кострикина в 1958 году к положительному решению ослабленной проблемы Бернсайда для любого простого числа p. Подробное изложение решения проблемы дано в его монографии «Вокруг Бернсайда» (1986 г.). Спустя 30 лет в 1989 году, применяя **модифицированный метод сэндвичей** и развивая другие интересные идеи, Е.И. Зельманов решил ослабленную проблему Бернсайда для произвольного показателя» [15, с.144].

Об этом же сообщает И.Р. Шафаревич в статье «Воспоминания об Алексее Ивановиче Кострикине» [16]: «Доказательство А.И. Кострикина основывается на новом методе, названном впоследствии «методом сэндвичей Кострикина». Доказательство Кострикина далеко не просто. Автору удалось «ужать» его в первой публикации примерно до 30 страниц текста – но за счет крайней лаконичности» [16, с.4]. Далее И.Р. Шафаревич указывает: «Еще несколько слов о дальнейшей судьбе ОПБ (т.е. когда n – не простое). Еще в 1956 г. английские математики Хигман и Холл показали, что ее решение может быть сведено к случаю, когда n есть степень простого числа. Этот последний вопрос был решен Е.И. Зельмановым в 1990 г. Зельманов использовал при этом **метод «сэндвичей Кострикина»** (наряду с другими методами). Таким образом, ОПБ теперь решена полностью» [16, с.4].

Какие еще методы, помимо метода «сэндвичей Кострикина», использовал Е.И. Зельманов в процессе доказательства теорем, ведущих к решению ослабленной проблемы Бернсайда (ОПБ)? Применялись ли какие-либо иные аналогии, позволившие решить указанную проблему? Да, применялись. В частности, применялась аналогия, описанная немецко-американским математиком Вильгельмом Магнусом (1907-1990). Эту аналогию математики обнаруживали и до В. Магнуса, но именно он, основываясь на этой эквивалентности, разработал эффективный метод редукции (сведения) задач из одной математической теории к задачам, относящимся к другой. Поясним сказанное. Еще в 30-х годах XX века было замечено, что группы, обладающие центральным рядом (нильпотентные группы), тесно связаны с линейными группами Ли, чьи алгебры Ли состоят из нильпотентных матриц. В группах Ли операции коммутирования соответствует умножение в алгебре Ли. Методы колец Ли стали активно применяться для изучения произвольных нильпотентных групп. Основываясь на указанной аналогии между кольцами Ли и нильпотентными группами, В. Магнус предложил метод редукции задач теории групп к задачам алгебр Ли. Эта «редукция Магнуса» имеет прямое отношение к решению ослабленной проблемы Бернсайда (ОПБ). А.И. Кострикин использовал «редукцию Магнуса» (аналогию между группами Ли и алгебрами Ли), решая ОПБ для частного случая. Эту же «редукцию Магнуса» применял Е.И. Зельманов, решая ОПБ для общего случая.

Н.Ю. Макаренко в автореферате докторской диссертации «Малые централизаторы в группах и кольцах Ли» [17] пишет: «Замечательным примером того, насколько эффективно работают методы колец Ли в теории нильпотентных групп, является история решения знаменитой ослабленной проблемы Бернсайда. Само возникновение вопроса о существовании универсальной конечной d-порожденной группы данного периода m, гомоморфными образами которой являются все конечные d-порожденные группы периода m, названного Магнусом [46] ослабленной проблемой Бернсайда (ОПБ), во многом обязано развитию новых линейных методов и желанием продвинуться вперед в той области, где эти методы эффективно работают. После того как Магнусом [46] (1950) и Сановым [14] (1952) для групп простого периода p была **получена редукция** теоретико-групповой задачи к вопросу о локальной нильпотентности (p-1)-энгелевой алгебры Ли над полем простой характеристики p, Кострикин [5, 6] (1958) решил ОПБ в этом частном случае. Решение Зельмановым [1-3] ОПБ для групп показателя p^k также включает **редукцию к алгебрам Ли**» [17, с.4].

7. Доказательство теоремы о существовании псевдо-голоморфных кривых, найденное Михаилом Громовым

Советский и российский математик, ныне работающий в США, лауреат премии Абеля за 2009 год, Михаил Леонидович Громов (род. 1943 г.) доказал существование псевдо-голоморфных кривых по аналогии с тем, как А.В. Погорелов доказал теорему об условиях, при которых является жесткой замкнутая выпуклая, гомеоморфная сфере, поверхность в римановом пространстве.

А.А. Борисенко «Алексей Васильевич Погорелов – математик удивительной силы» [18] сначала формулирует теорему, которую доказал А.В. Погорелов: «Теорема 7 [18, 6]. Замкнутая выпуклая гомеоморфная сфере поверхность в римановом пространстве, имеющая положительную внешнюю кривизну, закрепленная в одной точке вместе с пучком направлений, является жесткой, то есть не допускает бесконечно малых изгибаний» [18, с.252].

Далее автор повествует о том, как А.В. Погорелов доказал эту теорему и как схема его рассуждений подсказала М.Л. Громову способ доказательства существования псевдо-голоморфных кривых: «Для доказательства были получены оценки на нормальные кривизны замкнутой выпуклой гомеоморфной сфере поверхности положительной внешней кривизны в регулярном римановом пространстве в зависимости только от метрики поверхности и метрики пространства. Это обеспечивало априорные оценки на вторые производные радиуса-вектора. Оценки на производные более высоких порядков следовали из уравнения изометрического погружения. Из положительности внешней кривизны следовала эллиптичность этого уравнения. Соединением этих этапов и получается доказательство теоремы, которая дает решение обобщенной проблемы Вейля для изометрического погружения в риманово пространство. Проблема была решена А.В. Погореловым в окончательном виде. Когда решена трудная проблема, то сначала ею восхищаются, затем привыкают, а потом, если теорема не является инструментальной, ее потихоньку забывают. Однако в 1997 году на вручении премии Американского математического общества за работу «Pseudo-holomorphic curves in sympletic manifolds» М. Громов говорил, что идея доказательства существования псевдо-голоморфных кривых возникла у него **при чтении этой работы А.В. Погорелова**» [18, с.253].

Здесь [6] – Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. – М.: «Наука», 1969.

8. Доказательство теоремы об арифметичности равномерных решеток в полупростых группах Ли, найденное Григорием Маргулисом

Советский математик, лауреат премии Филдса за 1978 г. и премии Абеля за 2020 г., Григорий Александрович Маргулис доказал теорему об арифметичности равномерных решеток в полупростых группах Ли благодаря тому, что перенес в область доказательства указанной теоремы методы эргодической теории, с которыми он ознакомился, посещая семинар Я.Г. Синая, посвященный изучению эргодических систем. Безусловно, основанием для этого переноса было то, что Г.А. Маргулис (1975) обнаружил аналогию между некоторыми задачами теории полупростых групп Ли и методами эргодической теории.

Наталия Демина в статье «Григорий Маргулис: я старался работать в разных областях математики над трудными задачами» [19] приводит воспоминания Г.А. Маргулиса о его работе в семинаре Я.Г. Синая, где изучались вопросы эргодической теории: «На третьем курсе моим научным руководителем чуть не стал Владимир Арнольд, но он как раз уехал во Францию на год, и мы с Яковом Синаем друг друга нашли, и я стал его учеником. Я начал ходить на его семинары» [19, с.38].

Далее Н. Демина передает рассказ Г.А. Маргулиса о том, как он доказал теорему об арифметичности равномерных решеток в полупростых группах Ли (за это доказательство он и получил в 1978 г. премию Филдса): «…Наибольшее впечатление произвело мое доказательство арифметичности равномерных решеток. Причина в том, что результат формулировался в алгебраических, арифметических, геометрических терминах, а мое доказательство существенно **использует методы эргодической теории**. Поясню подробнее: доказательство легко сводится к так называемой теореме супержесткости. И опять же, с одной стороны, не было понятно, что он к этому сводится, а с другой, когда я это сделал, то это уже кажется весьма простым. Я доказал теорему супержесткости, комбинируя методы теории алгебраических групп с методами эргодической теории. В то время, с точки зрения алгебраистов, эргодическая теория была совершенно чужда теории дискретных подгрупп групп Ли. В мой адрес звучали всякого рода похвалы – превосходно! Фантастика!» [19, с.40].

Следует отметить, что к тому времени, когда Г.А. Маргулис (1975) доказал упомянутую теорему, относящуюся к теории полупростых групп Ли, средствами эргодической теории, математики уже выявили аналогию между некоторыми задачами эргодической теории и аналитической теории чисел. Другими словами, аналогия между теорией чисел и эргодической теорией была обнаружена раньше, чем удалось заметить (зафиксировать) аналогию между эргодической теорией и теорией полупростых групп Ли.

А.Г. Постников в работе «Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений» [20] пишет: «В основу **положена аналогия** между механикой и аналитической теорией чисел. Речь идет о тех вопросах механики, в которых исследуется кинематическая картина изменения, совершающегося во времени. Математически задача ставится как описание траекторий систем дифференциальных уравнений» [20, с.3]. «Среди модельных задач теории динамических систем, - продолжает автор, - рассматривались задачи, по своему характеру примыкающие к теории диофантовых приближений (например, задачи о движениях на торе, см. [36], стр.322-335); поэтому естественно, что в ряде задач теории диофантовых приближений стала обнаруживаться стратегия теории динамических систем. Кроме того, все более часто стала наблюдаться **аналогия в ситуациях**, которые встречаются в механике (в частности, в статистической механике) и в аналитической теории чисел. Например, классическим эффектом статистической физики является беспорядочное перемещение взвешенных в жидкости небольших частиц, так называемое броуновское движение: аналогичный эффект был обнаружен Ю.В. Линником и И.М. Кубилюсом [21] в задаче о сумме характеров, Л.П. Усольцевым в задаче о вычетах показательной функции по простому модулю (не опубликовано)» [20, с.3].

Здесь [21] – Кубилюс И.П., Линник Ю.В. Арифметическое моделирование броуновского движения // Известия вузов. Математика. – 1959. – Том 13. - № 6.

[36] – Степанов В.В. Интегральные кривые на поверхности тора // Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. - Москва-Ленинград: ОГИЗ ГИТТЛ, 1947.

Не менее интересен тот факт, что впервые аналогия между теорией вероятностей и теорией эргодических систем (эргодическими проблемами статистической механики) была обнаружена Жаком Адамаром (1927). В.Г. Мазья и Т.О. Шапошникова в книге «Жак Адамар: легенда математики» [21] отмечают: «В работах [I.265] и [I.292] Адамар рассмотрел итерации случайного отображения интервала (a, b) на себя, дополнив только что появившуюся работу Хостинского. Адамар **заметил аналогию** между исследованием предельного распределения в рассмотренной им задаче и эргодическими проблемами статистической механики. Эти работы Адамара (1927-1928) появились незадолго до того, как в теории марковских процессов были достигнуты значительные успехи, связанные с именами Колмогорова, Фреше, П. Леви, Феллера и других» [21, с.385].

9. Доказательство Великой теоремы Ферма, найденное Эндрю Уайлсом

Великая теорема Ферма – это утверждение о том, что уравнение $a^n + b^n = c^n$ при $n > 2$ не имеет целочисленных решений. Французский математик Пьер Ферма (1607-1665) сформулировал это утверждение, когда знакомился с книгой Диофанта «Арифметика». Выше мы отмечали, что Л. Эйлер доказал теорему Ферма для случая $n = 3$, используя метод бесконечного спуска. Впоследствии многие математики пытались найти общее доказательство указанной теоремы Ферма, но безуспешно. Долгожданное событие произошло в 1995 г. – английский математик Эндрю Уайлс, наконец-то, нашел решение проблемы, «дразнившей» специалистов более 300 лет: он опубликовал полное доказательство великой теоремы Ферма.

Использовал ли Эндрю Уайлс какие-либо аналогии в своем доказательстве? Конечно, использовал. Один из главных результатов, использованных Э. Уайлсом, - аналогия, обнаруженная японским математиком Ютакой Таниямой (1927-1958). Сопоставляя эллиптические кривые с модулярными формами, он заметил эквивалентность между ними (дальнейшее исследование этой эквивалентности привело к пониманию, что имеет место соответствие между указанными математическими объектами). Ю. Танияма (1955) сформулировал гипотезу: всякая эллиптическая кривая с рациональными коэффициентами является модулярной. В 1985 г. немецкий математик Герхард Фрей (род. 1944 г.) предположил, что если теорема Ферма неверна, то эллиптическая кривая $y^2 = x\ (x - a^n)\ (x - c^n)$ не может быть модулярной, что противоречит гипотезе Таниямы. Самому Г. Фрею не удалось доказать это утверждение, однако вскоре доказательство было получено американским математиком Кеннетом Рибетом (род. 1948 г.). Другими словами, К. Рибет показал, что великая теорема Ферма является следствием гипотезы Таниямы. В 1993-1995 гг. Эндрю Уайлс сообщил о доказательстве гипотезы Таниямы для полустабильных эллиптических кривых: это означало, что теорема Ферма доказана.

Последовательность событий, приведших к успеху Э. Уайлса, можно выразить следующей схемой: обнаружение аналогии между эллиптическими кривыми и модулярными формами (Танияма, 1950-е гг.) → выявление того, что аналогия является соответствием между этими объектами (Танияма, 1950-е гг.) → установление связи между гипотезой Таниямы и теоремой Ферма (Г. Фрей, 1985 г.) → доказательство того, что теорема Ферма является следствием гипотезы Таниямы (К. Рибет, 1986 г.) → доказательство гипотезы Таниямы для полустабильных эллиптических кривых (Э. Уайлс, 1995).

В эту схему следовало бы включить еще один момент, а именно этап исследований Э. Уайлса, когда он осознал неэффективность «системы Эйлера», которую он использовал, и продуктивность «системы Ивасавы» -

общего метода в арифметической алгебраической геометрии, разработанного японским математиком Кэнкити Ивасавой (1917-1998). Осуществленный Э. Уайлсом перенос теории Ивасавы в область доказательства теоремы Ферма – еще одна аналогия, определившая успех. Читатель найдет соответствующие сведения в статье С. Смирнова «Как ее доказывали» [22]. В 1999 г. Э. Уайлс удостоен премии Математического института Клэя (США), а в 2016 г. – премии Абеля.

10. Доказательство гипотезы Пуанкаре о свойствах односвязного компактного трехмерного многообразия без края (результат Григория Перельмана)

Отечественный математик Григорий Яковлевич Перельман (род. 1966 г.) доказал в 2002 г. гипотезу Пуанкаре о свойствах односвязного компактного трехмерного многообразия без края благодаря тому, что по аналогии перенес в область доказательства этой гипотезы метод потоков Риччи – Гамильтона. Поток Риччи – это определенное уравнение в частных производных, похожее на уравнение теплопроводности. Однако, помимо потоков Риччи – Гамильтона, Г.Я. Перельман использовал в своем доказательстве еще один инструмент – пространства А.Д. Александрова. Следовательно, он усмотрел аналогию между аспектами проблемы Пуанкаре и возможностями двух математических методов: потоков Риччи – Гамильтона и пространств А.Д. Александрова. Можно сделать вывод, что американский математик Ричард Гамильтон (род. 1943 г.) не смог доказать гипотезу Пуанкаре отчасти потому, что не владел теорией пространств Александрова.

В книге [23] описываются события, произошедшие после приезда Г. Перельмана в США (где он впервые услышал от Р. Гамильтона мысль о возможности использования потоков Риччи для доказательства гипотезы Пуанкаре): «Здесь Перельман и познакомился с человеком, который на долгие годы определил направление его исследований. Речь идет об известном американском топологе Ричарде Гамильтоне из Корнелльского университета, который еще в 1982 году опубликовал статью, посвященную уравнению названному впоследствии потоками Риччи. Это уравнение, по мнению Гамильтона, могло помочь в решении специальных топологических задач, в том числе знаменитой проблемы Пуанкаре. Решение подобных уравнений напоминает хорошо известный процесс распространения тепла в некой вещественной среде от более теплых к более холодным участкам или, говоря математическим языком, потоки Риччи, сглаживая аномалии, дают многообразиям более унифицированную геометрию» [23, с.75-76].

А.А. Борисенко в статье «Это было недавно, это было давно» [24] отмечает: «Хочу обратить внимание, что пространства Александрова сыграли существенную роль при изучении Г. Перельманом особенностей Ricci flow. Это был **существенный момент** для возможности хирургии и дальнейшего продолжения потока Ricci. Вроде бы после решения Перельманом проблемы Пуанкаре Р. Гамильтон говорил, что если бы у него были знания по пространствам Александрова, то он бы сам завершил доказательство гипотезы Пуанкаре и Терстона» [24, с.16].

11. Заключение

Итак, в двух частях нашей статьи мы рассмотрели историю 20-ти математических доказательств, обратив внимание на то, что идея доказательства появлялась у того или иного математика на основе аналогии: ученый осознавал возможность перенести схему рассуждений (метод аргументации) из одной области в другую. Так было с Фердинандом Линдеманом, когда он заимствовал методы Шарля Эрмита для доказательства трансцендентности числа π; так было с Анри Пуанкаре, когда он доказывал теорему, относящуюся к теории мероморфных функций, с помощью математических средств, почерпнутых из работ Карла Вейерштрасса. Аналогичным образом поступали Эмиль Артин, нашедший в трудах Н.Г.

Чеботарева способ доказательства общего закона взаимности, Джон фон Нейман, использовавший в своей теории игр теорему Л. Брауэра о неподвижной точке, Курт Гедель, доказавший теорему о неполноте с помощью диагонального метода Г. Кантора, и многие другие. Эти историко-научные факты демонстрируют, что Герман Вейль [25] поспешил с оценкой аналогии как логической процедуры, не способной помочь в разработке математических доказательств.

Интересно выяснить: заметил ли кто-нибудь эту ошибку Г. Вейля (даже если и не стал развивать идею о продуктивности аналогии в поиске доказательств)? Да, эту ошибку заметил отечественный математик, ученик И.Р. Шафаревича, Алексей Николаевич Паршин (1942-2022). В примечаниях к статье Г. Вейля о творчестве Феликса Клейна [25] А.Н. Паршин реагирует на мысль Г. Вейля о бесполезности аналогии для доказательства следующим образом: «Теперь с этим вряд ли можно согласиться» [26, с.388]. В другом месте своих комментариев отечественный математик объясняет свою позицию тем, что аналогия между числовыми и функциональными полями оказывала прямое влияние на содержание различных математических доказательств: «Эта аналогия неоднократно использовалась впоследствии, например, И.Р. Шафаревичем в его доказательстве общего закона взаимности (1949 г.) или в доказательстве Г. Фалтингсом гипотезы Морделла о рациональных точках на алгебраических кривых (1983 г.)» [26, с.387].

Мы сожалеем, что объем статьи не позволил нам показать роль указанной аналогии в работе И.Р. Шафаревича над доказательством своего закона взаимности. Но воспользуемся случаем, чтобы рекомендовать читателю книгу автора этих строк [27]. В любом случае существенная роль аналогии в математическом доказательстве отныне – установленный факт.

Литература:

1. Данилов Ю.А. Джон фон Нейман. – М.: «Знание», 1981. – 64 с.

2. Александров П.С. Пуанкаре и топология // Успехи математических наук. – 1972. - Том 27. - № 1 (163). – С.147-158.

3. Кац М., Улам С. Математика и логика. Ретроспектива и перспектива. – М.: «Мир», 1971. – 252 с.

4. Дойч Д. Структура реальности. – М.: «Альпина нон-фикшн», 2015. – 430 с.

5. Шрамко Я.В. Теорема Кантора и «фигуры умолчания» в научной дискуссии // Вестник Московского университета. Серия 7 «Философия». – 2003. - № 5. – С.68-72.

6. Карп Р. Комбинаторика, сложность и случайность // сборник «Лекции лауреатов премии Тьюринга». – М.: «Мир», 1993. – С.498-521.

7. Пенроуз Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.

8. Медведев Ф.А. Ранняя история аксиомы выбора. – М.: «Наука», 1982. – 304 с.

9. Мозер Ю. КАМ-теория и проблемы устойчивости. - Москва-Ижевск: НИЦ РХД, 2001. – 448 с.

10. Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. – М.: «Мир», 1973. – 278 с.

11. Воронов Ф.Ф. Квантование на супермногообразиях и аналитическое доказательство теоремы Атьи - Зингера об индексе // сборник «Итоги науки и техники». Серия «Современные проблемы математики». – 1990. - Том 38. – С.3-118.

12. Атья М.Ф., Зингер И.М. Индекс эллиптических операторов // Успехи математических наук. – 1968. - Том 23. - № 5 (143). – С.99-142.

13. Монастырский М.И. Современная математика в отблеске медалей Филдса. – М.: изд-во «Янус-К», 2000. – 200 с.

14. Математическая энциклопедия. Том 4. – М.: изд-во «Советская энциклопедия», 1984. – 1216 с.

15. Винберг Э.Б., Голод Е.С., Зельманов Е.И. и др. Алексей Иванович Кострикин // Успехи математических наук. – 2001. - Том 56. - № 3 (339). – С.143-145.

16. Шафаревич И.Р. Воспоминания об Алексее Ивановиче Кострикине // Математическое образование. – 2001. - № 1 (16). – С.2-7.

17. Макаренко Н.Ю. Малые централизаторы в группах и кольцах Ли // Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2006. – 27 с.

18. Борисенко А.А. Алексей Васильевич Погорелов – математик удивительной силы // Журнал математической физики, анализа, геометрии. – 2006. - Том 2. - № 3. – С.231-267.

19. Демина Н. Григорий Маргулис: я старался работать в разных областях математики над трудными задачами // Математическое просвещение. Серия 3. – 2023. - № 31. – С.37-47.

20. Постников А.Г. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Труды МИАН СССР. – 1966. - Том 82. – С.3-112.

21. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. Жак Адамар: легенда математики. – М.: МЦНМО, 2008. – 528 с.

22. Смирнов С. Как ее доказывали // Знание – сила. – 1999. - № 1. – С.8-18.

23. Арсенов О. Григорий Перельман и гипотеза Пуанкаре. – М.: «Эксмо», 2010. – 256 с.

24. Борисенко А.А. Это было недавно, это было давно // Математические структуры и моделирование. – 2022. - № 2 (62). – С.14-18.

25. Вейль Г. Феликс Клейн и его место в математической современности // Вейль Г. Математическое мышление. – М.: «Наука», 1989. - С.256-270.

26. Паршин А.Н. Комментарии // Вейль Г. Математическое мышление. – М.: «Наука», 1989. - С.386-392.

27. Новиков Н.Б. Природа математического гения. – М.: ИП РАН, 2024. – 780 с.