УДК 512.64

Мазниченко Т.М., Тескер Е.А.
студент
5 курс, факультет «Экономики и управления»
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
Россия, г. Санкт-Петербург

МЕТОДЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Аннотация: *Линейная алгебра представляет собой важный раздел математики, применяемый в широком спектре дисциплин, таких как физика, информатика, экономика и инженерия. Одним из методов решения сложных задач в линейной алгебре является использование методов расщепления.*

Ключевые слова: *методы расщепления, линейная алгебра, системы линейных уравнений, численные методы, анализ данных.*

Annotation. *Linear algebra is an important branch of mathematics applied across a wide range of disciplines such as physics, computer science, economics, and engineering. One of the methods for solving complex problems in linear algebra is the use of splitting methods.*

Keywords: *splitting methods, linear algebra, systems of linear equations, numerical methods, data analysis.*

Методы расщепления — это совокупность математических методов, направленных на декомпозицию сложных объектов линейной алгебры, таких как матрицы или операторы, на более простые компоненты с целью облегчения их анализа, численных вычислений и решения задач. Эти методы позволяют свести сложные вычислительные процессы к последовательности операций над элементарными объектами, что повышает эффективность и точность вычислений в разнообразных прикладных областях. [1]

Как утверждает Тыртышников Е. Е., «методы расщепления позволяют представить матрицы в виде произведения более простых компонентов, что существенно упрощает процесс вычислений и анализа». [8]

Существует несколько ключевых методов расщепления, которые находят широкое применение в линейной алгебре. Наиболее известными из них являются [2]:

1. Разложение Холецкого;
2. LU-разложение;
3. QR-разложение;
4. SVD-разложение (сингулярное разложение);
5. Eigen-разложение (разложение на собственные значения и векторы).

Разложение Холецкого. Разложение Холецкого используется для решения систем линейных уравнений, в которых коэффициенты матрицы положительно определены и симметричны. Этот метод позволяет разложить матрицу на произведение двух матриц:

$$A = LL^T, \tag{1}$$

Где L — нижняя треугольная матрица, L^T — транспортированная нижняя треугольная матрица[6].

Разложение Холецкого эффективно для симметричных матриц, так как требует меньшего количества вычислительных операций по сравнению с общими методами разложения. [3]

Как отмечает Гантмахер Ф. Р., «разложение Холецкого является оптимальным выбором при решении задач, где матрицы обладают симметрией и положительной определенностью, так как оно требует минимальных вычислительных затрат» [1].

Рассмотрим пример. Пусть дана матрица A, которая симметрична и положительно определена:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Для разложения Холецкого мы находим нижнюю треугольную матрицу L (формула 1).

1. Рассчитываем первый элемент:

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}} = \sqrt{25} = 5$$

2. Элементы L_{21} и L_{31}:

$$L_{21} = \frac{A_{21}}{L_{11}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$L_{31} = \frac{A_{31}}{L_{11}} = \frac{-5}{5} = -1$$

3. Рассчитываем элементL_{22}:

$$L_{22} = \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9} = 3$$

4. Рассчитываем элементL_{32}:

$$L_{32} = \frac{A_{32} - L_{31} \times L_{21}}{L_{22}} = \frac{0 - (-1) \times 3}{3} = 1$$

5. Перейдем к элементу L_{33}:

$$L_{33} = \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} = \sqrt{11 - 1 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

Итак, получаем:

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

LU-разложение. LU-разложение матрицы позволяет представить её как произведение двух треугольных матриц:

$$A = LU, \tag{2}$$

Где L — нижняя треугольная матрица, U — верхняя треугольная матрица.

Данный метод активно используется для решения систем линейных уравнений, обращения матриц и вычисления определителей. LU-разложение эффективно, поскольку его можно применять к широкому классу матриц, и оно позволяет выполнять решение систем уравнений с использованием метода обратной подстановки. [4]

Головко А. И. в своей работе подчеркивает, что «LU-разложение особенно полезно для матриц, где требуется нахождение обратных матриц или определителей, однако для плохо обусловленных матриц необходимо применять дополнительные методы стабилизации» . [2]

Перейдем к примеру. Пусть дана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

LU-разложение матрицы A предполагает нахождение нижней треугольной матрицы L и верхней треугольной матрицы U (формула 2).

1. Первый элемент:

$$L_{11} = 1, U_{11} = A_{11} = 2$$

2. Рассчитываем элементы второго столбца U:

$$U_{12} = A_{12} = 1, U_{13} = A_{13} = 1$$

3. Для нахождения L, вычисляем

$$L_{21} = \frac{A_{21}}{U_{11}} = \frac{4}{2} = 2$$

4. Рассчитываем элемент:

$$U_{22} = A_{22} - L_{21} \times U_{12} = -6 - 2 \times 1 = -8$$

5. Перейдём к следующему элементу:

$$L_{31} = \frac{A_{31}}{U_{11}} = \frac{-2}{2} = -1$$

6. Рассчитываем остальные элементы аналогичным образом:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QR-разложение. QR-разложение — это представление матрицы в виде произведения двух матриц: ортогональной матрицы Q и верхней треугольной матрицы R:

$$A = QR. \tag{3}$$

Этот метод применяется при решении задач наименьших квадратов и нахождении собственных значений матриц. QR-разложение особенно полезно для численной устойчивости, так как позволяет решать задачи с минимальной потерей точности при работе с вырожденными или плохо обусловленными матрицами. [1]

Седраков А. И. утверждает, что «QR-разложение является одним из ключевых методов при работе с задачами наименьших квадратов, а также для нахождения собственных значений матриц, так как обеспечивает численную устойчивость». [4]

Ниже приведён пример. Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

1. Первый шаг — найти норму первого столбца матрицы A:

   $$\|a_1\| = \sqrt{12^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{144 + 36 + 16} = \sqrt{196} = 14$$

2. Нормируем первый столбец, чтобы получить первый вектор q_1:

   $$q_1 = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

3. Для нахождения остальных векторов необходимо применить процедуру ортогонализации Грама-Шмидта к остальным столбцам. Полученные матрицы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{69}{175} & \frac{58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{-158}{175} & \frac{-6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{-6}{35} & \frac{33}{35} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

Сингулярное разложение. Сингулярное разложение (SVD, от англ. singular value decomposition) матрицы — это факторизация прямоугольной матрицы в произведение трёх матриц:

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\Sigma \mathrm{V}^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

Где U и V — ортогональные матрицы, а Σ — диагональная матрица с сингулярными числами. Этот метод применяется в задачах сжатия данных, обработки изображений, и решения систем уравнений с переопределёнными или недостаточно определёнными матрицами. Сингулярное разложение также используется для нахождения псевдообратных матриц. [2]

Тыртышников Е. Е. описывает этот метод как «незаменимый при анализе больших объемов данных, особенно при решении задач по сжатию данных и обработке изображений. Однако, его вычислительная сложность ограничивает его применение в задачах с большими матрицами». [5]

Рассмотрим матрицу А:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SVD-разложение предполагает представление $A^T A$ в виде произведения трёх матриц (формула 4).

1. Сначала находим собственные значения для $A^T A$, которые равны квадратам сингулярных чисел. Для данной матрицы это 4, 16, и 9.
2. Сингулярные числа:

$$\sum = diag(4.3.2.0)$$

3. Соответствующие собственные векторы матрицы А дают нам матрицы U и V:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigen-разложение. Eigen-разложение (разложение на собственные значения и векторы) является одним из важнейших методов расщепления в линейной алгебре. Матрица A представляется в виде [7]:

$$A = V\Lambda V^{-1}, \tag{5}$$

Где V — матрица собственных векторов, а Λ — диагональная матрица собственных значений.

Этот метод широко применяется в анализе динамических систем, решении задач оптимизации и симуляциях. Он позволяет значительно упростить исследование линейных операторов, так как собственные векторы и значения дают прямую информацию о поведении системы .

Как отмечает Лапидус Л. И., «Eigen-разложение позволяет глубоко анализировать динамические системы и использовать его в задачах оптимизации, предоставляя информацию о структуре и характеристиках линейных операторов». [3]

Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Eigen-разложение матрицы предполагает нахождение собственных значений и векторов. Для этого решаем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \to \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Решаем уравнение и находим собственные значения

$\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 2$

Теперь находим собственные векторы для каждого собственного значения.

1. Для $\lambda_1 = 5$, решаем систему:

$$(A - 5I)v = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Это приводит к уравнению $x_1 = x_2$, то есть собственный вектор v_1 можно записать как:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Для $\lambda_2 = 2$, решаем систему:

$$(A - 2I)v = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Это приводит к уравнению $x_1 = -0.5x_2$, то есть собственный вектор v_2 можно записать как:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь, имея собственные значения и собственные векторы, можем записать Eigen-разложение матрицы A следующим образом:

$A = V\Lambda V^{-1}$,

Где:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Л = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

V^{-1}— это обратная матрица к V, которая легко вычисляется. Таким образом, мы получаем полное разложение Eigen.

Сравнительный анализ методов расщепления Методы расщепления в линейной алгебре обладают различными характеристиками, которые делают их полезными для решения различных типов задач. Для более глубокого понимания этих различий в таблице 1 представлены основные критерии сравнения [10]:

Таблица 1.

Сравнительный анализ методов расщепления

Метод	Численная устойчивость	Требования к памяти	Область применения
Разложение Холецкого	Высокая для симметричных положительно определенных матриц	Требует относительно малый объем памяти	Решение систем уравнений с положительно определенными матрицами
LU-разложение	Умеренная, зависит от выбора главного элемента	Зависит от реализации (обычно небольшой)	Универсальное разложение для квадратных матриц, нахождение обратных матриц
QR-разложение	Высокая для плохо обусловленных матриц	Требует больше памяти по сравнению с LU	Решение задач наименьших квадратов, нахождение собственных значений
SVD-разложение	Очень высокая, применяется для любых матриц	Требует значительный объем памяти	Сжатие данных, обработка изображений, нахождение псевдообратных матриц
Eigen-разложение	Зависит от метода нахождения собственных значений	Требует памяти для хранения собственных векторов и значений	Спектральный анализ, анализ динамических систем, оптимизация

Обоснование критериев.

Численная устойчивость: методы разложения различаются по устойчивости к ошибкам округления. QR и SVD демонстрируют высокую устойчивость, тогда как LU-разложение может быть неустойчиво для плохо обусловленных матриц.

Требования к памяти: SVD и Eigen требуют больше памяти, поскольку работают с ортогональными и собственными матрицами, тогда как разложения Холецкого и LU менее ресурсоемки. [3]

Рассмотрим основные области применения методов расщепления: решение систем линейных уравнений, анализ данных, машинное обучение, задачи оптимизации и динамические системы.

1. Решение систем линейных уравнений. LU-разложение эффективно для разложения матриц в инженерии и физике, требующих точных расчетов. QR-разложение минимизирует ошибки в задачах наименьших квадратов. [7].

2. Анализ данных и машинное обучение. SVD помогает выделять главные компоненты в данных (например, в изображениях), а Eigen-разложение выявляет структуру данных, что оптимизирует алгоритмы машинного обучения.

3. Оптимизация и динамические системы. Eigen-разложение позволяет анализировать устойчивость и предсказуемость в динамических системах (например, в робототехнике), а также решать многокритериальные задачи в экономике и инженерии.

4. Применение в других областях. Методы расщепления полезны в компьютерной графике (создание 3D моделей), квантовой физике (моделирование частиц) и экономике (анализ сложных систем уравнений), способствуя прогнозам и оценке факторов.

Использованные источники

1. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Физматлит, 2024. — 576 с. ISBN 978-5-9221-0269-2.

2. Головко, А. И. Математические основы численных методов / А. И. Головко. — М.: Логос, 2019. — 384 с. ISBN 978-5-98704-881-3.

3. Лапидус, Л. И. Линейная алгебра и её приложения в вычислительной математике / Л. И. Лапидус. — М.: Наука, 2020. — 416 с. ISBN 978-5-02-014351-6.

4. Седраков, А. И. Численные методы линейной алгебры / А. И. Седраков. — М.: Физматлит, 2022. — 320 с. ISBN 978-5-9221-1079-6.

5. Тыртышников, Е. Е. Матричные методы в прикладной линейной алгебре / Е. Е. Тыртышников. — М.: МЦНМО, 2021. — 560 с. ISBN 978-5-94057-553-0.

6. Уразаева Л.Ю., Манюкова Н.В. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ GEOGEBRA ПРИ ОБУЧЕНИИ КОМПЬЮТЕРНОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ//Математические структуры и моделирование. 2022. № 4 (64). С. 140-152.

7. Яненко, Н.Н. О сходимости метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики (ЖВМиМФ). — 1962. — Вып.5. — С. 933—937.