

**СИЛА АНАЛОГИЙ. ТВОРЧЕСТВО ИГОРЯ РОСТИСЛАВОВИЧА
ШАФАРЕВИЧА**

Аннотация. Выдающийся отечественный математик Игорь Ростиславович Шафаревич (1923-2017) родился в семье, в которой поощрялась интеллектуальная деятельность. Интерес к математике возник у И.Р. Шафаревича еще в школьные годы. Уже в 15 лет он поступил на механико-математический факультет Московского университета и спустя два года, в 1940 г., экстерном окончил его. Защитил кандидатскую диссертацию в возрасте 19 лет, а докторскую – в 23 года (в 1946 г.). Работая в таких областях, как алгебра, теория чисел, алгебраическая геометрия, внес важный вклад в каждую из них. Характеризуя стиль работы И.Р. Шафаревича, его ученик А.Н. Паршин выделил в качестве основной следующую черту этого стиля – «блестящее нахождение и использование аналогий». Цель данной статьи – рассмотреть математические открытия И.Р. Шафаревича, в которых принцип аналогии играл ключевую роль.

Ключевые слова: новые идеи, математические теории, обнаружение сходства, проведение аналогии.

Annotation. The outstanding Russian mathematician Igor Rostislavovich Shafarevich (1923-2017) was born into a family in which intellectual activity was encouraged. Shafarevich showed interest in mathematics during his school years. Already at the age of 15, he entered the Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow University and two years later, in 1940, he graduated from it as an external student. He defended his candidate's dissertation at the age of 19, and his doctorate

at the age of 23 (in 1946). Working in areas such as algebra, number theory, and algebraic geometry, he made important contributions to each of them. Characterizing the work style of I.R. Shafarevich, his student A.N. Parshin singled out the following main feature of this style - "brilliant finding and use of analogies". The purpose of this article is to consider the mathematical discoveries of I.R. Shafarevich, in which the principle of analogy played a key role.

Key words: *new ideas, mathematical theories, discovery of similarities, drawing analogies.*

1. Аналогия первая: открытие общего закона взаимности

В 1900 г. во время Международного математического конгресса, проходившего в Париже, знаменитый математик Давид Гильберт (1862-1943) обнародовал свой список открытых (не решенных) математических проблем, который, по его мнению, должен был задать направление исследований на ближайшие десятилетия и зажечь новые имена (имена первооткрывателей) на небосклоне науки. Девятую строку в списке проблем Д. Гильберта занимала следующая проблема: сформулировать и доказать наиболее общий закон взаимности в произвольном числовом поле.

История общего закона взаимности начинается с работ Леонарда Эйлера (1707-1783), который, изучая соотношения между парой простых чисел и остатками от деления квадратов целых чисел на них, открыл так называемый закон взаимности квадратичных вычетов. Этот же закон, занимаясь аналогичными исследованиями в области теории чисел, установил Адриен Мари Лежандр (1752-1833). Наконец, не зная об этих исследованиях Л. Эйлера и А.М. Лежандра, то есть вполне самостоятельно, теорему о взаимности квадратичных вычетов открыл «король математиков» Карл Фридрих Гаусс (1777-1855). Как отмечают специалисты, К.Ф. Гаусс считал эту теорему центральным результатом высшей арифметики и называл ее «жемчужиной»

теории чисел (или «золотой теоремой»), предложив восемь разных доказательств сформулированного закона взаимности.

Дальнейшее развитие математики шло по пути обобщения квадратичного закона взаимности: после работ Фердинанда Эйзенштейна (1823-1852) и Эрнста Куммера (1810-1893) важный результат получил Давид Гильберт (автор упомянутого списка математических проблем). Ему удалось найти такое обобщение закона взаимности, которое впоследствии служило ориентиром для многих других математиков, занимавшихся аналогичной проблемой. А в 1950 г. созвездие имен, связанных с «золотой теоремой», пополнилось новым именем: И.Р. Шафаревич открыл весьма общую форму этой теоремы (обобщенный вариант закона взаимности).

Как же отечественный математик пришел к этому общему арифметическому закону? Благодаря применению принципа аналогии. И.Р. Шафаревич исходил из аналогии, существующей между теорией алгебраических чисел и теорией алгебраических функций, которая была обнаружена и детально исследована такими математиками, как Леопольд Кронекер (1823-1891), Рихард Дедекин (1831-1916), Генрих Вебер (1842-1913) и, наконец, великий Д. Гильберт. Примечательно, что, формулируя новый закон взаимности, И.Р. Шафаревич не «постеснялся» указать на ошибку Д. Гильберта и исправить ее. Последний считал, что закон взаимности аналогичен интегральной формуле Коши (интегральной теореме Коши об обнулении интеграла функции, охватывающего все ее особые точки). Как выяснил И.Р. Шафаревич, закон взаимности аналогичен теореме о сумме вычетов абелева дифференциала.

Ю.И. Манин в статье «К двенадцатой проблеме Гильберта» [1] пишет: «Гильберт придает **исключительное значение аналогии** между алгебраическими числами и алгебраическими функциями и предлагает искать на этом пути общую формулировку закона взаимности для L -х степеней. Эта задача была решена И.Р. Шафаревичем в работе [10]. Он обнаружил, в

частности, что для символа норменного вычета существует удивительная явная конструкция, **аналогичная конструкции** вычета дифференциала на римановой поверхности» [1, с.161].

Об этом же сообщают В.С. Куликов и Г.Б. Шабат в статье «Игорь Ростиславович Шафаревич – великий математик и учитель» [2]: «Аналогия между числовыми и функциональными кольцами известна с XIX века; Шафаревича эта **аналогия вдохновила** на первый из результатов, принесших ему мировое признание и поставивших его в ряд классиков нашей науки. Хотя речь идет о весьма продвинутой математике, Игорь Ростиславович умел объяснять фундаментальное сходство между числами и функциями для широкой публики. В книге [8] он пишет: «...Коммутативное кольцо очень часто может быть интерпретировано как кольцо функций на множестве, «точки» которого соответствуют гомоморфизмам исходного кольца в поля. Исходным примером является кольцо $k[V]$, где V – аффинное многообразие над полем k , а с него геометрическая интуиция распространяется на более общие кольца. Таким образом, концепция, согласно которой «всякий геометрический объект координатизируем некоторым кольцом функций на нем» дополняется другой, согласно которой «любое кольцо координатизирует какой-то геометрический объект». Для Шафаревича приведенная пара концепций играла исключительно важную роль...» [2, с.49].

Далее авторы приводят соображения И.Р. Шафаревича из его работы [3], где советский математик, используя указанную выше аналогию, получил общий закон взаимности: «Как пишет сам Шафаревич в [7], идея о **глубокой аналогии** между полями алгебраических чисел и полями алгебраических функций была подготовлена работами Гаусса и Куммера и впервые высказана, видимо, Кронекером. Было замечено, что простые идеалы в теории алгебраических чисел играют такую же роль, как точки римановых поверхностей в полях алгебраических функций, простым делителям дискриминанта соответствуют точки ветвления римановой поверхности и т.д.

Далее Шафаревич пишет о желательности **перенесения в теорию алгебраических чисел** результатов теории абелевых интегралов и чуть-чуть «поправляет» Гильберта, указав, что формула произведения является аналогом не интегральной формулы Коши, а теоремы о сумме вычетов абелева дифференциала. Это простое замечание приводит Шафаревича к одной из ключевых идей работы: символ норменного вычета $(\alpha, \beta / p)$ аналогичен вычету абелева дифференциала $\alpha \times d\beta$ в точке p » [2, с.51-52].

Здесь [7] – Шафаревич И.Р. Общий закон взаимности // Математический сборник. – 1950. – Том 26 (68). - № 1. – С.113-146.

Действительно, если обратиться к указанной статье И.Р. Шафаревича, т.е. к его работе «Общий закон взаимности» (1950), которая содержится в его «Собрании сочинений в трех томах» [4], то в ней отечественный математик дает понять, что аналогия между числовыми и функциональными полями – орудие, с помощью которого он сформулировал общий закон взаимности (и тем самым внес вклад в решение 9-й проблемы Д. Гильберта). Итак, И.Р. Шафаревич пишет: «Идея о **глубокой аналогии** между полями алгебраических чисел и полями алгебраических функций была подготовлена работами Гаусса (C. Gauss) и Куммера (E. Kummer) и впервые высказана, видимо, Кронекером (L. Kronecker). Было замечено, что простые идеалы в теории алгебраических чисел играют такую же роль, как точки римановой поверхности в полях алгебраических функций, простым делителям дискриминанта соответствуют точки ветвления римановой поверхности и т.д. Возникла задача **планомерного перенесения** в теорию алгебраических чисел результатов из теории алгебраических функций, доказываемых там аналитическим путем. Наиболее изученная часть теории алгебраических функций – это теория абелевых интегралов. Д. Гильберт (D. Hilbert, [8], стр.365, 483) начал исследовать **аналог** этой теории в полях алгебраических чисел» [4, с.26]. Далее И.Р. Шафаревич формулирует свой обобщенный закон

взаимности и показывает, что он аналогичен теореме о сумме вычетов абелева дифференциала.

2. Аналогия вторая: новое доказательство теоремы Кронекера – Вебера о конечном абелевом расширении поля

Многие специалисты считают, что математическое доказательство – это дедуктивная конструкция. В рамках такой точки зрения, чтобы найти систему аргументов, позволяющих доказать то или иное математическое утверждение, необходимо использовать метод дедукции – логический подход, дающий возможность обнаруживать дедуктивные связи между различными фактами, выстраивать цепи умозаключений, в которых одни звенья строго выводятся из других. Многочисленные примеры таких цепей рассмотрел еще Аристотель, давший классификацию различных форм дедуктивных силлогизмов. Взгляд на математическое доказательство как на результат, получаемый с помощью дедуктивного метода, исключает какую-либо роль нестрогих эмпирических приемов мышления (например, аналогии) в поиске такого доказательства.

Так, известный немецкий математик, ученик Д. Гильберта, Герман Вейль (1885-1955) в книге «Математическое мышление» [5], а именно в статье «Феликс Клейн и его место в математической современности», пишет: «В самом деле, когда Гильберт прокладывал новые пути в теории числовых полей, он руководствовался аналогией, имеющейся между ней и положением вещей в области алгебраических функций, которое с помощью своих методов раскрыл Риман. Конечно, для доказательства аналогия была совершенно бесполезна» [5, с.268].

На самом деле, если внимательно проанализировать процесс, связанный с поиском эффективных математических доказательств, то легко обнаружить факты, не согласующиеся с мнением Г. Вейля. Во-первых, многие математические доказательства появляются на свет в результате того, что

математик (руководствуясь аналогией) переносит определенные доказательные рассуждения, продемонстрировавшие свою продуктивность, из одной области в другую, то есть из сферы доказательства одной теоремы в сферу обоснования другой. Во-вторых, очень часто математик находит доказательство теоремы, когда выявляет аналогию между идеями и методами, относящимися к разным математическим теориям. Это дает ему возможность осуществить редукцию – свести утверждение из одной концепции к утверждению, взятому из другой, и доказать теорему с помощью аргументов, заимствованных из этой «другой» концепции. Редукция – всегда следствие обнаружения аналогии (сходства, эквивалентности) между разными математическими идеями. Таким образом, во многих случаях нахождение эффективных доказательных аргументов связано с применением принципа аналогии (принципа переноса), а не метода дедукции. Следующий эпизод из научной жизни И.Р. Шафаревича является убедительной иллюстрацией сказанного.

И.Р. Шафаревич (1951) нашел новое доказательство теоремы Кронекера – Вебера, когда обнаружил аналогию между этой теоремой и утверждениями, содержащимися в теории p -адических чисел. И.Р. Шафаревич понял, что теорема Кронекера – Вебера, по существу, представляет собой один из фактов p -адической теории. Доказательство результата Кронекера – Вебера в рамках этой математической теории автоматически влечет истинность этого результата в той форме, в которой он первоначально появился на свет (Л. Кронекер дал первое доказательство своей теоремы, когда p -адической теории еще не существовало в математике).

И.Р. Шафаревич в статье «Новое доказательство теоремы Кронекера - Вебера» [6] пишет: «Теорема Кронекера – Вебера, утверждающая, что всякое абелево расширение поля рациональных чисел содержится в некотором поле деления круга, является центральной теоремой теории абелевых расширений поля рациональных чисел. Эта теорема не только дает классификацию

абсолютно абелевых полей, но и определяет законы разложения в них, дает возможность выяснить структуру их дискриминантов и получить явные выражения для числа классов идеалов. После того, как Кронекер [7] в 1853 г. высказал эту теорему, было предложено много ее доказательств, основывающихся на различных принципах [1, 2, 5, 6, 8]. Настоящая статья содержит новое доказательство теоремы Кронекера – Вебера, отличающееся от ранее известных тем, что оно, во-первых, значительно короче их, а во-вторых, в большей мере выясняет суть дела. Именно, оказывается, что теорема Кронекера – Вебера является, по существу, p -адическим фактом. Если доказать **p -адический аналог** этой теоремы, то сама теорема получается автоматически путем применения теоремы Минковского о существовании критических простых чисел» [6, с.72].

Следует отметить, что сама p -адическая теория чисел появилась в математике опять же благодаря использованию принципа аналогии. В частности, немецкий математик Курт Гензель (1861-1941) построил эту теорию по аналогии с теорией полиномов (многочленов) в комплексной области. Изобретенный им p -анализ представляет собой аналог разложения рядов Пуанкаре (Лорана).

Ф.А. Маврикиди в статье «Фракталы: постигая взаимосвязанный мир» [7] повествует: «В математику p -адические числа были введены в конце XIX века немецким математиком К. Гензелем **по аналогии** с полиномами в комплексной области. Оказалось, что числа и функции комплексного переменного во многом ведут себя сходным образом. Подобно тому, как комплексные числа аналогичны векторам на плоскости, p -адические числа представляют **аналогию разложения** в так называемый ряд Лорана произвольной функции и записываются в виде либо бесконечного ряда по степеням какого-либо простого числа... либо в записи, подобной десятичной записи числа, но только с бесконечной «целой» частью, соответствующей положительным степеням...» [7, с.81].

Об этом же сообщает Герман Вейль в очерке «Полвека математики» [8]: «Новая техника « p -адических чисел» была введена в алгебру и теорию чисел К. Гензелем в самом начале столетия, важность ее с тех пор всё возрастала. Гензель создал это орудие **по аналогии** со степенными рядами, которые играли такую важную роль в созданной Риманом и Вейерштрассом теории алгебраических функций одной переменной и интегралов от этих функций (абелевых интегралов)» [8, с.15].

3. Аналогия третья: формулировка двух гипотез относительно свойств поля p -адических чисел и поля алгебраических чисел k

В 1950-х годах И.Р. Шафаревич сформулировал две гипотезы относительно свойств поля p -адических чисел и поля алгебраических чисел k . Согласно первой гипотезе, над полем p -адических чисел имеется лишь конечное число бирационально неизоморфных кубических кривых с заданным абсолютным инвариантом. Согласно второму предположению, над полем алгебраических чисел k имеется лишь конечное число бирационально неизоморфных кубических кривых, которые над всеми p -адическими пополнениями поля k изоморфны одной и той же кубической кривой (определенной над полем k). Как И.Р. Шафаревич пришел к этим гипотезам? Благодаря тому, что обнаружил аналогию между «задачей погружения» в теории полей алгебраических чисел и задачей классификации эллиптических кривых, определенных над такими полями. Впоследствии эти гипотезы были доказаны.

А.Н. Паршин и И.Р. Шафаревич в статье «Арифметика алгебраических многообразий (в отделе алгебры МИАН)» [9] пишут: «В 1956 г. в докладе на III Всесоюзном математическом съезде И.Р. Шафаревич обратил внимание **на некоторую аналогию** между «задачей погружения» в теории полей алгебраических чисел и теорией эллиптических кривых. В обеих теориях

рассматриваемые объекты обладают локальными инвариантами, которые их, однако, не определяют полностью. Главный интерес и представляют «локально тривиальные» объекты. В связи с этим были сформулированы две конкретные гипотезы: 1) над полем p -адических чисел имеется лишь конечное число бирационально неизоморфных кубических кривых с заданным абсолютным инвариантом; 2) над полем алгебраических чисел k имеется лишь конечное число бирационально неизоморфных кубических кривых, которые над всеми p -адическими пополнениями поля k изоморфны одной и той же кубической кривой (определенной над полем k). Обе гипотезы удалось вскоре доказать в гораздо более общей и естественной постановке, применив к этим вопросам метод, ранее применявшийся в других вопросах алгебры (прежде всего, в теории простых алгебр) и называемый теперь «спуском Галуа». Этот подход объяснил и **аналогию** с задачами погружения: она объясняется тем, что в обеих проблемах исследуемые объекты задаются когомологиями группы Галуа алгебраического замыкания основного поля с коэффициентами в некотором конечном модуле [1]» [9, с.72-73].

Здесь [1] – Шафаревич И.Р. О бирациональной эквивалентности эллиптических кривых // Доклады АН СССР. – 1957. – Том 114. - № 2. – С.267-270.

Этот же вопрос обсуждается в статье А.Н. Паршина «Числа как функции (развитие одной идеи в московской школе алгебраической геометрии)» [10], где автор говорит о Шафаревиче: «Уже в 1956 году, в докладе на 3-м Всесоюзном математическом съезде он указал на аналогию между задачей погружения в теории Галуа полей алгебраических чисел и задачей классификации эллиптических кривых, определенных над такими полями. Общим для этих задач была их формулировка на языке когомологий Галуа и наличие локальных инвариантов, связанных с пополнениями основного числового поля (смотрите подробнее [22]). От этих арифметических задач было естественно перейти к изучению эллиптических кривых над полем

алгебраических функций, а это и есть поверхности с пучком эллиптических кривых...» [10, с.381].

Здесь [22] – Демушкин С.П., Кострикин А.И., Новиков С.П. и др. Игорь Ростиславович Шафаревич (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи математических наук. – 1984. – Том 39. - № 1. – С.167-174.

4. Аналогия четвертая: построение теории униформизации для специального класса алгебраических многообразий

В 1966 г. И.Р. Шафаревич (совместно с И.И. Пятецким-Шапиро) построил теорию униформизации для специального класса многообразий – факторов однородных областей по арифметическим группам. Он сделал это по аналогии с теорией униформизации алгебраических кривых. Отметим, что первые важные результаты в теории униформизации алгебраических кривых получили независимо друг от друга французский математик Анри Пуанкаре (1854-1912) и немецкий математик Пауль Кебе (1882-1945). Они доказали теорему униформизации для произвольных многозначных аналитических функций. Оба математика опубликовали свои доказательства в 1907 г. Теорема униформизации обычно формулируется так: каждая односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна одной из трех римановых поверхностей: открытому единичному диску, комплексной плоскости или сфере Римана. Тот факт, что И.Р. Шафаревич (1966) разработал теорию униформизации для специального класса многообразий (указанного выше), используя в качестве образца, т.е. аналога, уже существовавшую к тому времени концепцию униформизации алгебраических кривых, - рассматривается во многих источниках.

Так, А.Н. Паршин и И.Р. Шафаревич в работе [9] сообщают: «Теория униформизации алгебраических кривых представляется в алгебраической геометрии изолированным феноменом. Во-первых, существует множество

односвязных алгебраических многообразий, для которых вопрос об униформизации теряет смысл. Можно думать, что интересная теория существует для тех многообразий, универсальная накрывающая которых является, например, однородной симметрической областью. Но мы не знаем алгебраической характеристики таких многообразий. С этим связано другое важное затруднение – теория униформизации, даже для кривых, является чисто трансцендентной, не известен ее алгебраический аспект. В работе [31] сделана попытка построить **аналог теории униформизации**, свободной от этих недостатков, но имеющей смысл лишь для некоторого специального класса многообразий – факторов однородных областей по арифметическим группам, в наиболее широком смысле «модулярных» многообразий» [9, с.80].

Здесь [31] – Пятецкий-Шапиро И.И., Шафаревич И.Р. Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация // Известия АН СССР. Серия «Математическая». – 1966. – Том 30. - № 3. – С.671-704.

Аналогичные сведения содержатся в статье С.П. Демушкина, А.И. Кострикина, С.П. Новикова и др. «Игорь Ростиславович Шафаревич (к шестидесятилетию со дня рождения)» [11], где авторы указывают: «Помимо работ, объединенных в большие циклы, - также характерная черта научного творчества И.Р. Шафаревича, - у него имеется несколько работ по алгебраической геометрии, стоящих особняком. Среди них работа [35], в которой была сделана попытка построить **алгебраический аналог** теории униформизации для алгебраических многообразий – факторов однородных областей по арифметическим группам» [11, с.171-172].

Примечательно, что И.Р. Шафаревич и И.И. Пятецкий-Шапиро в работе «Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация» [12] сами говорят о том, как они пытались построить теорию униформизации для специального класса многообразий (упомянутого выше): «В работе строится **алгебраический аналог** теории униформизации алгебраических многообразий автоморфными функциями. Построенная теория применима к

определенному классу алгебраических многообразий над произвольным полем. В частности, над полем комплексных чисел она применима к многообразиям, униформизируемым арифметическими группами. В этом случае она эквивалентна теории операторов Гекке» [12, с.671].

5. Аналогия пятая: обобщение теоремы Эрмита на случай алгебраических многообразий

И.Р. Шафаревич (1962) высказал гипотезу о том, что для алгебраических многообразий, определенных над полем K , должна быть справедлива классическая теорема Ш. Эрмита о конечности числа расширений поля алгебраических чисел (теорема о конечности числа полей алгебраических чисел с заданными точками ветвления). Другими словами, И.Р. Шафаревич, руководствуясь аналогией, счел возможным перенести указанную теорему Эрмита на случай алгебраических многообразий.

А.Н. Паршин и И.Р. Шафаревич в статье «Арифметика алгебраических многообразий» [9] повествуют: «...Важной задачей диофантовой геометрии является классификация алгебраических многообразий, определенных над полем K . Мы ограничимся случаем, когда X – алгебраическая кривая и K – конечное расширение поля Q или поле алгебраических функций от одной переменной с алгебраически замкнутым полем констант k . В [52] И.Р. Шафаревич предположил, что в этой ситуации справедливо далеко идущее **обобщение классической теоремы Эрмита** о конечности числа расширений поля алгебраических чисел, имеющих заданную степень и точки ветвления. Гипотеза И.Р. Шафаревича состоит в том, что существует лишь конечное число алгебраических кривых X над K , имеющих заданный род $g > 1$ и множество точек плохой редукции S . <...> Используя теорему Зигеля о целых точках, И.Р. Шафаревич доказал справедливость этой гипотезы для гиперэллиптических кривых [52] (вариант доказательства смотрите в [22]). В

работе [55] был найден общий подход к гипотезе И.Р. Шафаревича для функционального случая» [9, с.86-87].

Здесь [52] – Шафаревич И.Р. Поля алгебраических чисел // сборник докладов Международного математического конгресса в Стокгольме. – 1962. – С.163-176.

[22] – Паршин А.Н. Минимальные модели кривых рода 2 и гомоморфизмы абелевых многообразий, определенных над полем конечной характеристики // Известия АН СССР. Серия «Математическая». – 1972. – Том 36. – С.67-109.

[55] – Паршин А.Н. Алгебраические кривые над функциональными полями // Известия АН СССР. Серия «Математическая». – 1968. – Том 32. - № 5. – С.1191-1219.

Аналогичные сведения можно найти в другом источнике. А.Н. Паршин в комментариях к статье Германа Вейля «О геометрии чисел» [13] указывает: «Одним из наиболее известных применений теоремы Минковского является знаменитое неравенство Минковского для дискриминанта поля алгебраических чисел, из которого, в частности, вытекают несуществование неразветвленных расширений поля \mathbb{Q} и теорема Эрмита о конечности числа полей алгебраических чисел с заданными точками ветвления и степенью (в случае поля алгебраических функций на кривой V аналогом неравенства Минковского служит неравенство $s_1(V) \leq 2$). Эти утверждения **были обобщены И.Р. Шафаревичем** на случай алгебраических многообразий, определенных над глобальными полями...» [13, с.488].

Сошлемся на еще одну работу. В.С. Куликов и Г.Б. Шабат в статье «Игорь Ростиславович Шафаревич – великий математик и учитель» [2] пишут об аналогии, которую использовал И.Р. Шафаревич при перенесении теоремы Эрмита на случай алгебраических многообразий: «В рамках **анalogии**, которой был посвящен предыдущий раздел (анalogии между теорией чисел и теорией функций – Н.Н.Б.), Игорь Ростиславович в [10] сформулировал

алгебро-геометрический **аналог теоремы Эрмита** [40], утверждающей конечность числа полей алгебраических чисел с заданным дискриминантом (современное доказательство смотрите в [23]). Формулировка Шафаревича в [10] такова: конечно ли число расслоений на кривые рода $g > 1$, если фиксирована базисная кривая и множество критических точек расслоения? (В дальнейшем эти точки будут называться точками плохой редукции). Шафаревич получил утвердительный ответ на свой вопрос в некоторых частных случаях и отметил, что доказательство в общем случае должно быть значительно труднее аналогично тому, как конечность числа расширений с заданными точками ветвления поля алгебраических чисел доказывается гораздо труднее, чем теорема Эрмита в теории алгебраических чисел – мы **видим аналогию** между числами и функциями в действии! Предположение оказалось правильным: гипотеза была доказана лишь два десятилетия спустя в результате напряженной работы ряда выдающихся математиков, многие из которых принадлежали к школе Шафаревича» [2, с.52].

[10] – Шафаревич И.Р. Поля алгебраических чисел // Доклады Международного конгресса математиков (Стокгольм, 1962). – Швеция: Институт Миттаг-Леффлера, 1963. – С.163-176.

[23] – Вейль А. Основы теории чисел. – М.: «Мир», 1972.

Следует отметить, что указанная гипотеза И.Р. Шафаревича (мысль о возможности перенести теорему Эрмита на случай алгебраических многообразий) имела в математике далеко идущие последствия. Сначала ученик И.Р. Шафаревича А.Н. Паршин доказал, что из гипотезы И.Р. Шафаревича вытекает гипотеза Л. Морделла (выдвинутая британским математиком Луисом Морделлом (1888-1972) в 1922 г.). Последняя формулируется следующим образом. Пусть дана произвольная алгебраическая кривая над числовым полем. Если ее род равен 1, то группа рациональных точек на ней конечно порождена, а если ее род больше 1, то множество рациональных точек на ней конечно. В 1968 г. А.Н. Паршин

изобрел «трюк Паршина», позволивший доказать, что указанная гипотеза Л. Морделла выводится из гипотезы И.Р. Шафаревича. А затем (в 1983 г.) немецкий математик Герд Фальтингс, используя этот «трюк Паршина» и ряд других результатов, доказал гипотезу Л. Морделла, которая, как мы видим, «ожидала» своего доказательства более 60-ти лет. В 1986 г. Г. Фальтингс удостоен премии Филдса (аналога Нобелевской премии для математиков).

Приведем ряд цитат из работ, указывающих, что гипотеза И.Р. Шафаревича (через несколько промежуточных этапов) привела Г. Фальтингса к указанной премии Филдса. С.О. Горчинский, В.С. Куликов, А.Н. Паршин и др. в статье «Игорь Ростиславович Шафаревич и его математическое наследие» [14] пишут: «...А.Н. Паршин обнаружил [93], что из гипотезы конечности Шафаревича следует гипотеза Морделла о конечности числа рациональных точек на кривых рода $g \geq 2$; соответствующее рассуждение было впоследствии названо трюком Паршина. В частности, вместе с указанными выше соображениями оно позволило доказать в работе [93] аналог гипотезы Морделла для кривых над $C(B)$ » [14, с.16]. Авторы добавляют: «Трюк Паршина, а также результат еще одного представителя школы И.Р. Шафаревича – Ю.Г. Зархина [174] (ученика Ю.И. Манина) послужили важнейшими шагами на пути к доказательству гипотезы конечности Шафаревича и соответственно гипотезы Морделла над числовыми полями, найденному Г. Фальтингсом [35]» [14, с.16].

Здесь [93] – Паршин А.Н. Алгебраические кривые над функциональными полями // Известия АН СССР. Серия «Математическая». – 1968. – Том 32. - № 5. – С.1191-1219.

[174] – Зархин Ю.Г. Теорема конечности для изогений абелевых многообразий над функциональными полями конечной характеристики // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Том 8. - № 4. – С.31-34.

Аналогичная информация представлена в статье В.С. Куликова и Г.Б. Шабата [2]: «Гипотеза Шафаревича сыграла решающую роль в доказательстве

гипотезы Морделла – одним из центральных результатов математики двадцатого века, сформулированной Л. Морделлом в 1922 году и доказанной Г. Фальтингсом в 1983 году. Гипотеза формулируется просто: пусть дана произвольная алгебраическая кривая над числовым полем; если ее род равен 1, то группа рациональных точек на ней конечно порождена, а если ее род больше 1, то множество рациональных точек на ней конечно» [2, с.52-53]. «...Ученик Шафаревича А.Н. Паршин в [32] доказал, что гипотеза Морделла вытекает из гипотезы Шафаревича; для этого он изобрел так называемый трюк Паршина, состоящий в построении (с помощью остроумной геометрической конструкции) по каждой рациональной точке кривой рода ≥ 2 над полем алгебраических чисел другой кривой над расширением этого поля» [2, с.53].

6. Аналогия шестая: перенос теоремы Г. Минковского на случай эллиптических кривых

Убежденный в возможности перенести в область алгебраической геометрии наиболее важные результаты, доказанные в теории чисел, И.Р. Шафаревич (1962) пришел к идее о переносе на случай алгебраических многообразий теоремы Германа Минковского о несуществовании неразветвленных расширений поля \mathbb{Q} . И.Р. Шафаревичу удалось доказать свою идею для случая эллиптических кривых. В дальнейшем смелая гипотеза И.Р. Шафаревича была доказана в исследованиях А.Б. Волынского и В.А. Абрашкина.

А.Н. Паршин и И.Р. Шафаревич в статье «Арифметика алгебраических многообразий» [9] пишут: «В [52] И.Р. Шафаревич обсудил также гипотезу о несуществовании алгебраических кривых X над полем K , если множество S пусто и поле $K = \mathbb{Q}$ (или $k(t)$). В геометрическом случае следует так же, как и выше, исключить некоторый класс кривых (постоянные кривые в характеристике нуль). Эта гипотеза **является аналогом** известной в теории

чисел теоремы Минковского о несуществовании неразветвленных расширений поля Q . Случай эллиптических кривых был получен И.Р. Шафаревичем [52], кривые рода 2 рассмотрены А.Б. Волынским. В.А. Абрашкин доказал, что над полем Q не существует абелевых многообразий размерности ≤ 3 , имеющих всюду хорошую редукцию [53], [54]. Аналогичное утверждение для абелевых многообразий также справедливо (А. Гротендик)» [9, с.88].

Здесь [52] – Шафаревич И.Р. Поля алгебраических чисел // сборник докладов Международного математического конгресса в Стокгольме. – 1962. – С.163-176.

[53] – Абрашкин В.А. Хорошая редукция двумерных абелевых многообразий // Известия АН СССР. Серия «Математическая». – 1976. – Том 40. - № 2. - С.262-272.

[54] – Абрашкин В.А. p -делимые группы над Z // Известия АН СССР. Серия «Математическая». – 1977. – Том 41. - № 5. – С.937-956.

7. Аналогия седьмая: формулировка гипотезы о том, что супер-сингулярные поверхности типа КЗ «не вырождаются»

Прежде чем рассказать о том, как И.Р. Шафаревич пришел к гипотезе о «невыврождении» супер-сингулярных поверхностей типа КЗ, целесообразно хотя бы вкратце обсудить, что такое поверхности типа КЗ. Для этого обратимся к очерку «Математические работы И.Р. Шафаревича» [15], где отмечается: «Одним из самых ярких феноменов теории алгебраических поверхностей являются поверхности типа КЗ. Каждая из этих поверхностей обладает единственной невырожденной формой ω типа (2,0). Интеграл этой формы по базисным двумерным циклам удовлетворяет соотношениям, аналогичным соотношениям Римана для римановой поверхности» [15, с.13].

Описание природы поверхностей типа КЗ дается также в работе В.С. Куликова и Г.Б. Шабата [2]: «Одним из важнейших и интереснейших классов алгебраических поверхностей, исследованию свойств которого, начиная с Куммера, уделяли огромное внимание (и уделяют до сих пор) многие выдающиеся алгебраические геометры, в том числе и И.Р. Шафаревич, - это поверхности типа КЗ (названные так в честь Куммера, Кэлера и Кодаиры). По определению, гладкая комплексная компактная односвязная поверхность X , на которой существует нигде не обращающаяся в нуль голоморфная 2-форма ω , называется поверхностью типа КЗ (или просто КЗ-поверхностью)» [2, с.56].

Теперь можно описать генезис упомянутой гипотезы И.Р. Шафаревича, то есть его предположения о том, что супер-сингулярные поверхности типа КЗ «не вырождаются». Сразу укажем, что эта гипотеза отечественного математика оказалась верной и была доказана, обретя статус теоремы о «невыврождении» упомянутых поверхностей. Анализ работ И.Р. Шафаревича показывает, что он пришел к этой гипотезе по аналогии с тем фактом, что «не вырождаются» абелевы многообразия, у которых p -алгебра Ли является унитарной.

И.Р. Шафаревич и А.Н. Рудаков в работе «Поверхности типа КЗ над полями конечной характеристики» [16] отмечают: «...Супер-сингулярные поверхности типа КЗ «не вырождаются». Есть несколько аргументов в пользу справедливости такой гипотезы. Прежде всего – **аналогия** с абелевыми многообразиями, где имеет место **аналогичный факт**: «не вырождаются» абелевы многообразия, у которых p -алгебра Ли является унитарной. Это следует из теоремы о стабильной редукции Мамфорда – Гротендика, согласно которой для каждого семейства абелевых многообразий $X \rightarrow \text{Spec } R$ существует семейство $X' \rightarrow \text{Spec } R'$ с описанными выше свойствами, для которого замкнутый слой является расширением абелева многообразия при помощи произведения групп G_m » [16, с.194].

Далее мы переходим к описанию весьма интересного эпизода из жизни И.Р. Шафаревича, когда он «под стук колес» электропоезда, беседуя со своим коллегой А.И. Кострикиным, обнаружил аналогию между разными математическими объектами и на основе этой аналогии разработал общую схему классификации простых алгебр Ли.

8. Аналогия восьмая: разработка общей схемы классификации простых алгебр Ли

Иногда новые научные идеи посещают ученого, когда он погружен в свои размышления «под стук колес» поезда, несущего его из одного города в другой, или во время общения с коллегой, который может поддержать научную беседу, глядя, как за «окном электрички» быстро меняется пейзаж. Например, именно в такой ситуации известный отечественный физик, лауреат Нобелевской премии по физике за 2003 г., В.Л. Гинзбург (руководствуясь аналогией) смело перенес изучаемые в земных условиях явления сверхпроводимости и сверхтекучести на такие космические объекты, как нейтронные звезды и белые карлики. В статье «Сверхпроводимость и сверхтекучесть (что удалось и чего не удалось сделать)» [17] В.Л. Гинзбург вспоминает: «Году, кажется, в 1962-ом я ехал в поезде из Кисловодска в Москву. Был один в купе, читать было нечего, вот и решил что-нибудь придумать. Я уже ряд лет занимался физикой низких температур и астрофизикой, и поэтому, естественно, задался вопросом: где и в каких условиях сверхтекучесть и сверхпроводимость могут наблюдаться в космосе. Задать вопрос – это во многих случаях уже половина дела. Вот я и уложился во времени: подумал, что возможно существование сверхтекучести в нейтронных звездах, сверхпроводимости в атмосфере белых карликов...» [17, с.240].

Похожая ситуация (причем в те же 1960-е годы) однажды произошла в жизни И.Р. Шафаревича. Вместе со своим коллегой Алексеем Ивановичем Кострикиным (1929-2000) он возвращался домой на электричке. В ходе беседы с А.И. Кострикиным он обнаружил аналогию между простыми алгебрами Ли и псевдогруппами Картана (то есть между теорией алгебр, разработанной норвежцем Софусом Ли, и теорией псевдогрупп, созданной французом Эли Картаном). Руководствуясь этой аналогией, И.Р. Шафаревич и А.И. Кострикин провели исследование обеих теорий и разработали общую схему классификации простых алгебр Ли. Эта схема привела их к важной математической гипотезе о том, что любая простая конечномерная ограниченная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем либо является классической алгеброй Ли, либо изоморфна алгебре Ли картановского типа. Эта гипотеза, опубликованная отечественными математиками в [18], оказалась верной, ее доказали в 1984 г. Р.Е. Блок и Р.Л. Вильсон.

И.Р. Шафаревич в статье «Воспоминания об Алексее Ивановиче Кострикине» [19] пишет: «Над полями положительной характеристики все алгебры, открытые Ли, Энгелем и Киллингом, тоже существуют. Но были известны и примеры других, каких-то странных алгебр, так что все вместе они не укладывались в какую-либо общую картину. Этими «странными» алгебрами в 1960-е годы интересовался Алексей Иванович. И вот, как-то в выходной день мы с ним отправились на целый день на прогулку за город. А возвращаясь домой, в поезде заговорили как раз об этом предмете. Дело в том, что меня тогда интересовала очень красивая и забытая теория Картана так называемых «псевдогрупп», построенная в начале XX века. Это было нечто вроде теории бесконечномерных простых алгебр Ли, но реализующихся как преобразования конечномерного пространства. Я и сказал Алексею Ивановичу: «Знаете, одна из «странных» простых алгебр Ли в положительной характеристике **очень похожа** на одну из псевдогрупп в классификационном списке Картана». Тогда Алексей Иванович знал «назубок» известные примеры

«странных» простых алгебр Ли в положительной характеристике, а я – список простых псевдогрупп, найденных Картаном. И это действительно незабываемое воспоминание – как под стук колес электрички **возникал полнейший параллелизм** двух теорий, на первый взгляд не имевших друг к другу никакого отношения. Позже мы стали заниматься с Алексеем Ивановичем этим вопросом более систематично и опубликовали несколько работ, где, в частности, высказывали гипотезу, что простые алгебры Ли в положительной характеристике – это в точности те же алгебры Ли, которые существуют в характеристике 0 (и были найдены Ли, Энгелем, Киллингом) и те, которые соответствуют простым псевдогруппам, найденным Картаном (принцип соответствия был точно указан). Нам удалось доказать эту гипотезу лишь при некоторых, довольно существенных, ограничениях. <...> Гипотеза была доказана двумя американскими математиками – Бруком и Вильсоном» [19, с.5-6].

Некоторые детали открытия И.Р. Шафаревича и А.И. Кострикина можно почерпнуть из автореферата диссертации А.А. Ладилевой «Деформации исключительных простых алгебр Ли» [20], где автор отмечает: «Общая схема классификации простых алгебр Ли была разработана в 60-х годах XX века А.И. Кострикиным и И.Р. Шафаревичем, сформулировавшими в 1966 г. основную классификационную гипотезу, согласно которой любая простая конечномерная ограниченная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 5$ либо является классической алгеброй Ли, либо изоморфна алгебре Ли картановского типа. Эту гипотезу доказали в 1984 г. Р.Е. Блок и Р.Л. Вильсон» [20, с.3].

Разумеется, всякая аналогия, как правило, основывается на определенном эмпирическом материале. Если у Вас нет эмпирического материала, который, как известно, накапливается в ходе «экспериментального» изучения отдельных примеров, то у вас не будет «информационной базы» для выявления аналогий и формулировки математических гипотез. А.И.

Кострикин, «соучастник» математического открытия, сделанного И.Р. Шафаревичем, отмечает, что это открытие стало возможно благодаря накопленному «экспериментальному материалу».

В частности, А.И. Кострикин в статье «Алгебры Ли и конечные группы» [21] пишет о своем докладе «Модулярные вариации на тему Картана»: «Под таким названием автором был прочитан доклад на Международном математическом конгрессе в Ницце [19]. В нем подводился итог исследованиям в СССР и США, определившим на долгие годы программу классификации простых конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, или короче – простых модулярных алгебр Ли. Новый взгляд на весь предмет сложился после двух работ А.И. Кострикина, И.Р. Шафаревича [20, 21], в которых был переосмыслен ранее накопленный **экспериментальный материал** и сделано важное методологическое наблюдение. Суть его заключается в том, что модулярная картина – результат соединения естественных аналогов двух совершенно различных классов алгебр Ли в нулевой характеристике: классических конечномерных простых алгебр и алгебр, отвечающих простым транзитивным псевдогруппам преобразований, которые были классифицированы Э. Картаном в начале нашего столетия» [21, с.138].

9. Аналогия девятая: получение результатов, подготовивших появление «теории Аракелова»

Как известно, советский математик, ученик И.Р. Шафаревича, Сурен Юрьевич Аракелов (род. 1947 г.) построил «геометрию Аракелова» за счет того, что по аналогии перенес в теорию чисел или, лучше сказать, в числовую ситуацию (на арифметические поверхности), понятия и конструкции алгебраической геометрии. Этот перенос осуществлялся в два этапа: сначала рассматривались арифметические поверхности, а затем определялся «архимедов аналог» понятия, заимствованного из геометрии.

Следует отметить, что важную работу по осуществлению данного переноса проделал И.Р. Шафаревич. Можно сказать, что он прошел часть пути, который нужно было пройти, чтобы на свет появилась «теория Аракелова». В частности, рассмотрев в рамках «теории схем Гротендика» арифметические поверхности, а затем определив «архимедов аналог» (арифметический аналог) используемых геометрических понятий, И.Р. Шафаревич в 1966 г. построил на арифметических поверхностях теорию пересечений и канонический класс. Теория пересечений представляла собой реализацию «арифметического аналога» индекса пересечения, существующего в геометрии (и топологии). Поэтому неудивительно, что «теорию Аракелова» создал именно ученик И.Р. Шафаревича.

О результатах И.Р. Шафаревича, подготовивших возникновение «теории Аракелова», пишут А.Н. Паршин и И.Р. Шафаревич в статье «Арифметика алгебраических многообразий» [9]: «Как мы видели выше, в диофантовой геометрии гораздо больше успехов достигнуто в геометрическом случае, т.е. для многообразий, определенных над функциональными полями. Поскольку числовой случай наиболее интересен, неоднократно делались попытки перенесения понятий и конструкций из геометрической ситуации в числовую. Наиболее удобным для этой цели оказался язык схем Гротендика» [9, с.88].

Далее авторы указывают: «...Для **перенесения той или иной техники** из алгебраической геометрии в числовую ситуацию необходимо преодолеть два этапа. Сначала рассмотреть (в рамках теории схем) арифметические поверхности, а затем определить «архимедов аналог» рассматриваемого понятия. За последние годы эта программа была реализована для таких важных и естественных для геометра объектов, как индекс пересечения и канонический класс. Теория пересечений и канонический класс были построены И.Р. Шафаревичем [58] на арифметических поверхностях (независимо это было сделано С. Лихтенбаумом и П. Делинем). Полная теория в числовом случае была развита С.Ю. Аракеловым [59, 60]. Он определил для числового случая такие понятия, как дивизор, дивизор функции, линейная эквивалентность, индекс пересечения, канонический класс, и доказал формулу присоединения. В [60] сформулирован также аналог теоремы Римана - Роха» [9, с.88-89].

Здесь [58] – Shafarevitch I.R. Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes. – Bombay: 1966.

[59] – Аракелов С.Ю. Теория пересечений дивизоров на арифметической поверхности // Известия АН СССР. Серия «Математическая». – 1974. – Том 38. - № 6. – С.1179-1192.

[60] – Arakelov S.J. Theory of intersections on the arithmetic surface // Proceedings International Congress of Mathematicians. – Vancouver (Canada). – 1974. – Vol.1. – P.405-408.

Аналогия между числовыми и геометрическими объектами, использованная И.Р. Шафаревичем и приблизившая разработку «теории Аракелова», обсуждается также в очерке «Математические работы И.Р. Шафаревича» [15]: «Сравнение числовой о геометрической ситуаций, блестяще использованное И.Р. Шафаревичем уже в его работе по общему закону взаимности, является давней традицией теории чисел и алгебраической геометрии. Она восходит к Кронекеру и Гильберту. В русле этих идей в работе

[55] была развита конструкция минимальных моделей и канонического класса для схем («схем Гротендика» - Н.Н.Б.) размерности два: как обычных двумерных алгебраических многообразий над классическими полями, так и алгебраических кривых над такими естественными кольцами, как кольцо целых чисел. Это единообразное изложение проливает новый свет и на геометрический, и на арифметический случай. По существу, работа [55] впервые **открыла возможность** серьезного рассмотрения «арифметической поверхности» как геометрического объекта: без нее немислимы были бы последующие сильные результаты теории чисел, дающие, скажем, полное описание точек конечного порядка эллиптических кривых над полем рациональных чисел» [15, с.12].

Здесь [55] – Shafarevitch I.R. Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes. – Bombay: 1966.

Позволим себе привести еще один источник. А.Н. Паршин в статье «Числа как функции» [10] повествует: «В своих лекциях в Бомбее в 1966 году [54] И.Р. Шафаревич систематически развил основные понятия и результаты из теории алгебраических поверхностей для случая арифметических поверхностей. В ней он построил, используя схемный язык (язык теории схем Гротендика – Н.Н.Б.), теорию пересечений, определил и исследовал бирациональные преобразования и минимальные модели» [10, с.382]. «Однако в лекциях Шафаревича рассматривались лишь неполные схемы, определенные над аффинной базой – спектром кольца целых [чисел] поля алгебраических чисел. С самого начала было ясно, что такой подход является лишь **частичным аналогом** ситуации с алгебраическими поверхностями. В конце лекций ставилась задача найти **полный аналог** алгебраической поверхности и построить для него теорию пересечений» [10, с.383].

Отметим, что теория Аракелова лежала без движения почти десять лет, и лишь в начале 1980-х годов послужила отправным моментом для дальнейшего

развития в работах Г. Фальтинга. Эти результаты оказали большое влияние на развитие теории чисел, а также на развитие физики элементарных частиц.

10. Аналогия десятая: попытка получить оценку для числа предельных циклов полиномиального векторного поля

Если в молодости И.Р. Шафаревич занимался решением 9-й проблемы Д. Гильберта, открыв свой знаменитый обобщенный закон взаимности, то в более поздние годы отечественный математик предпринимал попытки приблизиться к решению 16-й проблемы Д. Гильберта. Как известно, эта проблема распадается на две части (задачи). Первая задача предлагает исследовать взаимное расположение овалов вещественных алгебраических кривых (а также алгебраических поверхностей) произвольной степени. Вторая задача состоит в получении верхней оценки для числа предельных циклов полиномиального векторного поля произвольной степени. И.Р. Шафаревич занимался второй задачей, то есть пытался оценить число предельных циклов указанного векторного поля. И вновь отечественный математик избрал в качестве орудия (инструмента) решения проблемы принцип аналогии. И.Р. Шафаревич предположил, что существует аналогия (эквивалентность) между теорией предельных циклов и формулой Лефшеца для неподвижных точек автоморфизмов многообразий. Он пришел к заключению о необходимости получить аналог формулы Лефшеца для векторных полей. Если бы удалось получить данную формулу, то в этом случае предельные циклы выступали бы в качестве «неподвижных» кривых этих векторных полей. В результате мы смогли бы свести (редуцировать) 16-ю проблему Д. Гильберта к исследованию упомянутого аналога формулы Лефшеца.

А.Н. Паршин в статье «Слово о И.Р. Шафаревиче» [22] пишет: «...Он занимался вопросом о предельных циклах обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости (16-я проблема Гильберта) и пытался найти

доказательство этой гипотезы. Его идея была в получении **аналога** известной в топологии формулы Лефшеца для неподвижных точек автоморфизмов многообразий на случай не автоморфизмов, а векторных полей. Тогда предельные циклы будут выступать в качестве «неподвижных» кривых этих полей» [22, с.20-21].

Характеризуя стиль работы И.Р. Шафаревича, его основные черты, А.Н. Паршин в той же статье говорит об одной из этих черт: «Блестящее нахождение и **использование аналогий** между, казалось бы, никак не связанным (**аналогия** между символами в теории чисел и вычетами на римановых поверхностях, или переход от групп преобразований Картана над полем вещественных чисел к алгебрам Ли над конечным полем, о чем мы уже говорили)» [22, с.20].

11. Заключение

Британский ученый Френсис Гальтон (1822-1911), автор концепции наследственного таланта, пытался доказать эту концепцию, анализируя и сравнивая оценки, получаемые студентами Кембриджского университета при сдаче экзаменов по математике. Он считал, что: 1) различие экзаменационных оценок студентов отражает различие их природной интеллектуальной одаренности; 2) интеллект дается нам от рождения и остается неизменным на протяжении всей нашей жизни. Отсюда, разумеется, следует, что студент, набравший минимальное количество баллов во время экзаменов по математике (или какому-либо иному предмету), никогда не догонит студента, набравшего максимальное количество тех же баллов (ведь интеллект остается, как отмечено выше, неизменным). Впоследствии, после публикации книги Ф. Гальтона «Наследственный гений» (1869), его концепция таланта приобрела много сторонников, которые разработали множество тестов для определения уровня интеллекта (коэффициента интеллекта - IQ). При разработке и

использовании этих тестов их авторы исходили из тех же представлений, что и Ф. Гальтон: 1) тесты измеряют наследственную компоненту интеллекта; 2) уровень интеллекта является постоянным (неизменным), следовательно, если при тестировании вы набрали минимум баллов, то этот «минимум» нельзя исправить (ведь он отражает «биологический потолок» ваших умственных способностей). Несмотря на то, что эти представления о наследственных «лимитах» (пределах) нашего интеллекта никогда не были доказаны, они по-прежнему используются в качестве аргументов в пользу идеи Ф. Гальтона о генетической детерминации наших способностей. Почему-то никому из защитников наследственной концепции не пришло в голову, что оценки на экзаменах и показатели иных достижений отражают лишь текущее положение ученика, то есть эти оценки ничего не могут сказать о том, чего он может добиться в будущем.

Ниже мы приведем пример, опровергающий пессимистическую точку зрения на интеллект, пропагандируемую сторонниками Ф. Гальтона. Как ни странно, этот пример – эпизод из жизни И.Р. Шафаревича. В школьные годы И.Р. Шафаревич любил читать книги, но недостаточное внимание уделял математике. При выполнении контрольных работ по математике он дважды получил самую низкую оценку (двойку), после чего возникла угроза вернуться на класс назад. Как поступил И.Р. Шафаревич в данной ситуации? Во время зимних каникул, когда его сверстники «повесили свои портфели на гвоздь», он упорно решал задачи из сборников математических задач, взятых в библиотеке. И поднял свой «уровень интеллекта» (математического интеллекта) таким образом, что изменил мнение учителей о себе.

В.Б. Демидович в книге «К истории мехмата МГУ» [23] приводит рассказ И.Р. Шафаревича о годах обучения в школе: «Интерес же к математике появился у меня еще в школе. Очень странным образом. Я заболел, мне было скучно, и я стал читать учебники – когда сидишь один, учеба идет как-то быстрее. Я прочел учебники за свой класс, и за следующий. Но когда меня

перевели в следующий класс, мне математика всё еще плохо давалась. Я даже получил **две двойки по контрольным**, и учительница мне сказала, что если я их не исправлю, то вернусь обратно на класс назад» [23, с.119]. «Так вот, мне очень не хотелось никуда переходить из своего класса. И когда наступили зимние каникулы, я все каникулы сидел дома (в то время как основным развлечением школьников тогда было ходить на каток, кататься на коньках) и решал задачи из задачника Шапошникова и Вальцова. И мне очень понравилась алгебра преобразований, когда из сложных выражений, в конце концов, получается, например, ноль» [23, с.119].

Таким образом, чтобы изменить свой уровень интеллекта (который Ф. Гальтон считал «константой»), достаточно отказаться от привычных форм досуга, приобрести необходимую литературу и начать ее штудировать. А затем убедиться в том, что задачи, не решавшиеся прежде, становятся вполне решаемыми. Но, конечно, главное опровержение концепции Ф. Гальтона – это вся творческая жизнь И.Р. Шафаревича, который делал математические открытия с помощью принципа аналогии (приема мышления, не содержащего в себе процессуальных аспектов, затрудняющих его использование обычными людьми).

Литература

1. Манин Ю.И. К двенадцатой проблеме Гильберта // сборник «Проблемы Гильберта». – М.: «Наука», 1969. - С.159-162.
2. Куликов В.С., Шабат Г.Б. Игорь Ростиславович Шафаревич – великий математик и учитель // Математическое просвещение. Серия 3. – 2018. - Вып.22. - С.37-63.
3. Шафаревич И.Р. Общий закон взаимности // Математический сборник. – 1950. – Том 26 (68). - № 1. – С.113-146.

4. Шафаревич И.Р. Общий закон взаимности // Шафаревич И.Р. Собрание сочинений в трех томах. Том 3. Часть 1. – М.: изд-во АОЗТ «Прима В», 1996. - С.26-71.
5. Вейль Г. Математическое мышление. – М.: «Наука», 1989. – 400 с.
6. Шафаревич И.Р. Новое доказательство теоремы Кронекера - Вебера // Шафаревич И.Р. Сочинения в трех томах. Том 3. Часть 1. – М.: изд-во АОЗТ «Прима В», 1996. - С.72-77.
7. Маврикиди Ф.А. Фракталы: постигая взаимосвязанный мир // Грани науки. – 2000. - № 3. - С.78-85.
8. Вейль Г. Полвека математики. – М.: «Знание», 1969. – 48 с.
9. Паршин А.Н., Шафаревич И.Р. Арифметика алгебраических многообразий (в отделе алгебры МИАН) // Труды Математического института АН СССР. – 1984. - № 168. – С.72-97.
10. Паршин А.Н. Числа как функции (развитие одной идеи в московской школе алгебраической геометрии) // сборник «Математические события XX века». – М.: «Фазис», 2003. - С.363-397.
11. Демушкин С.П., Кострикин А.И., Новиков С.П. и др. Игорь Ростиславович Шафаревич (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи математических наук. – 1984. – Том 39. - № 1. – С.167-174.
12. Пятецкий-Шапиро И.И., Шафаревич И.Р. Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация // Известия АН СССР. Серия «Математическая». – 1966. – Том 30. - № 3. – С.671-704.
13. Паршин А.Н. Комментарии к статье Г. Вейля «О геометрии чисел» // Вейль Г. Избранные труды. – М.: «Наука», 1984. - С.488-489.
14. Горчинский С.О., Куликов В.С., Паршин А.Н. и др. Игорь Ростиславович Шафаревич и его математическое наследие // Труды МИАН. – 2019. - Том 307. – С.9-31.

15. Математические работы И.Р. Шафаревича // Шафаревич И.Р. Сочинения в трех томах. Том 3. Часть 1. – М.: изд-во АОЗТ «Прима В», 1996. - С.6-23.
16. Рудаков А.Н., Шафаревич И.Р. Поверхности типа КЗ над полями конечной характеристики // сборник «Итоги науки и техники». Серия «Современные проблемы математики». – 1981. - Том 18. - С.115-207.
17. Гинзбург В.Л. Сверхпроводимость и сверхтекучесть (что удалось и чего не удалось сделать) // Гинзбург В.Л. О науке, о себе и о других. Статьи и выступления. – М.: изд-во «Физматлит», 2003. – С.198-265.
18. Кострикин А.И., Шафаревич И.Р. Псевдогруппы Картана и р-алгебры Ли // Доклады АН СССР. – 1966. – Том 168. - № 4. – С.740-742.
19. Шафаревич И.Р. Воспоминания об Алексее Ивановиче Кострикине // Математическое образование. – 2001. - № 1 (16). – С.2-7.
20. Ладилова А.А. Деформации исключительных простых алгебр Ли // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – СПб.: СПбГУ, 2010. – 16 с.
21. Кострикин А.И. Алгебры Ли и конечные группы // Труды МИАН СССР. – 1984. - Том 168. - С.132-154.
22. Паршин А.Н. Слово о И.Р. Шафаревиче // сборник «Историко-математические исследования». Серия 2. – Вып.16 (51). – М.: «Янус-К», 2018. – С.19-21.
23. Демидович В.Б. К истории Мехмата МГУ. – М.: изд-во МГУ, 2013. – 424 с.